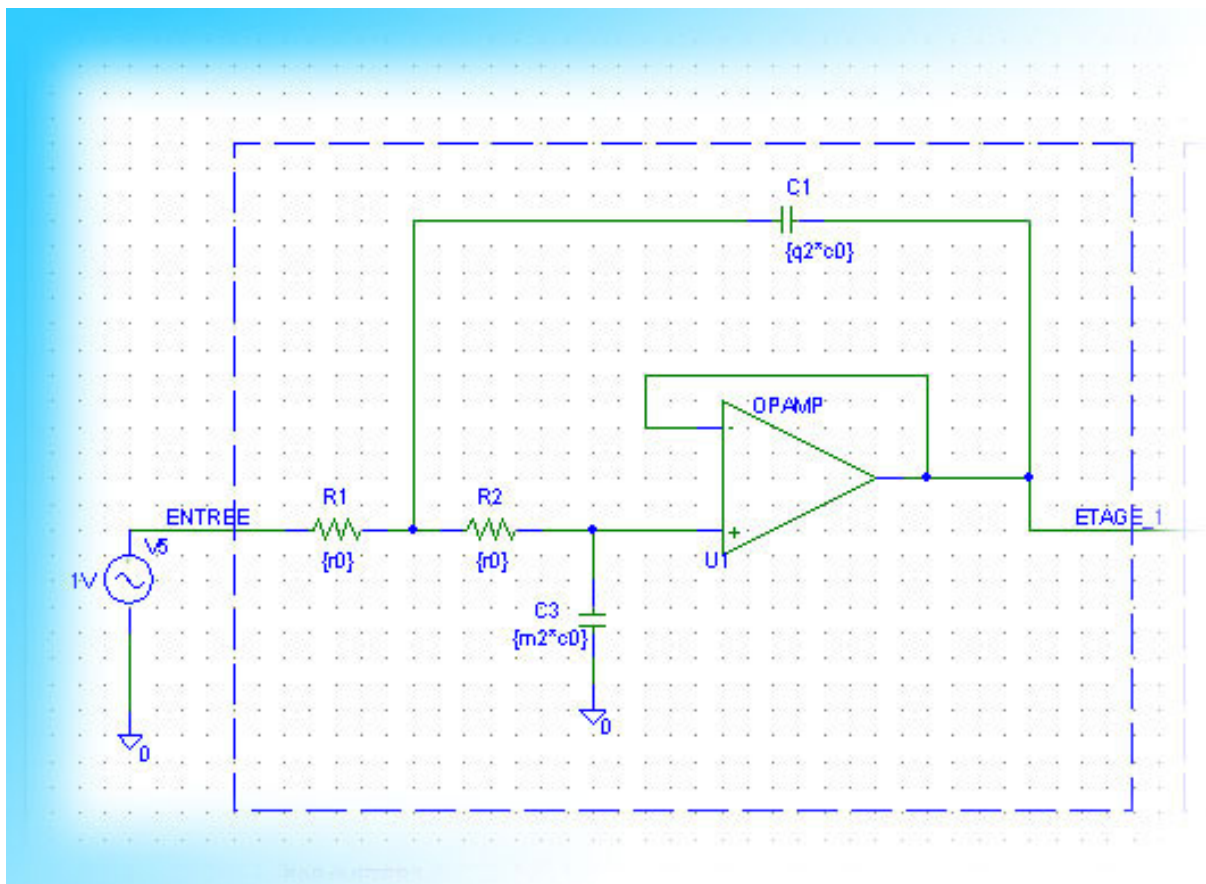


# Filtrage analogique

*Cours complet*



# Filtrage analogique

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆  
Plan du cours  
◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

- Chapitre 1 : Introduction et généralités sur le filtrage
- Chapitre 2 : Filtres élémentaires, et normalisation
- Chapitre 3 : Recherche des pôles dans une fonction de transfert
- Chapitre 4 : Filtres de Butterworth, de Chebycheff, de Legendre, de Bessel, et de Cauer.
- Chapitre 5 : Synthèse de filtres actifs
- Chapitre 6 : Synthèse de filtre par variable d'état
- Chapitre 7 : Sensibilité

*« Je vois le monde à travers le filtre de mes émotions, quelle que soit leur force. Le filtre est toujours là, le monde aussi ». Esther ROCHON. Romancière québécoise.*

## Filtrage analogique. [CHAPITRE 1]

### 1. Introduction et généralités sur le filtrage

Filtrer un signal, c'est lui faire traverser un ensemble de dispositifs électroniques, pour :

- modifier son spectre de fréquence
- modifier sa phase
- extraire une partie de l'information liée au signal
- éliminer des fréquences parasites

On trouve des filtres dans les systèmes de communication (téléphonie, télévision, radio, transmission de données). Le domaine de fréquence s'étend jusqu'à la dizaine de gigahertz. Selon le domaine de fréquence considéré, les filtres seront différents :

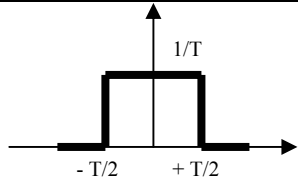
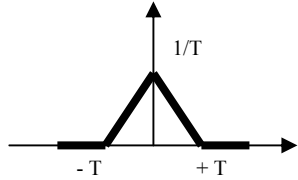
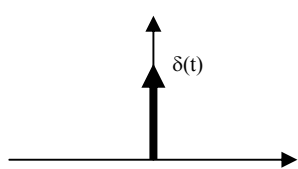
- En HF on utilise des filtres passifs LC. Cependant leur principal défaut reste leur difficile intégration, car les inductances sont volumineuses, lourdes et coûteuses...
- En BF on utilise des filtres actifs, qui permettent l'obtention de composants intégrés (filtres à capacités commutées).

### 2. Rappels sur les signaux

On peut distinguer divers signaux :

- Les signaux continus
- Les signaux transitoires (signal qui commence à un instant, et se termine à un autre).
- Les signaux périodiques

En électronique, et plus précisément en traitement du signal, trois signaux ont un usage privilégié :

La fonction porte		La porte a une largeur T, et une hauteur '1/T', de telle manière à ce que l'aire de celle-ci soit égale à l'unité.
L'impulsion triangulaire		L'aire est égale à l'unité.
L'impulsion de Dirac		Il s'agit d'une distribution, et non d'une fonction. Sa largeur est nulle, et son aire vaut l'unité.

### 3. Système linéaire et invariant

Un système est linéaire si  $A.E_1(t) + B.E_2(t) \rightarrow A.S_1(t) + B.S_2(t)$ .

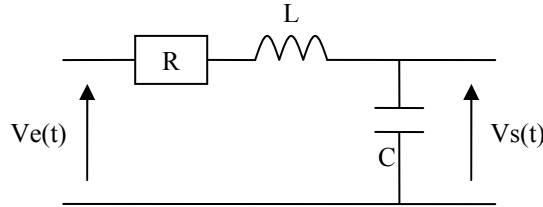
Un système est invariant dans le temps si  $E_1(t - \theta) \rightarrow S_1(t - \theta)$ .

4. Stabilité des systèmes linéaires

Tout système linéaire peut se modéliser par une équation différentielle de la forme :

$$b_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 \cdot s(t) = a_n \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 \cdot e(t)$$

Ainsi, si on prend un circuit RLC série, on aura :



$$\left. \begin{aligned} e(t) &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + s(t) \\ i(t) &= C \cdot \frac{ds(t)}{dt} \end{aligned} \right\} LC \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

L'ordre du système est défini par le plus haut degré du membre de gauche (celui représentatif de la sortie). On peut montrer que pour un système physique, on a  $n \geq m$ .

$$b_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 \cdot s(t) = a_n \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 \cdot e(t)$$

Résolution de l'équation différentielle :

Il s'agit de la somme de deux solutions :

- Une solution générale, qui est solution de l'équation sans second membre (quand l'entrée est égale à zéro). Comme on n'impose rien en entrée, c'est le régime libre.
- Une solution particulière qui est solution de l'équation avec second membre.

Stabilité d'un système :

Un système est dit stable, si  $s(t) \rightarrow 0$  quand  $e(t > 0) = 0$ . Ainsi dans l'équation différentielle, cela donne :

$$b_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 \cdot s(t) = 0$$

Les solutions de cette équation seront de la forme :

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{p \cdot t} \\ s'(t) &= p \cdot e^{p \cdot t} \\ s''(t) &= p^2 \cdot e^{p \cdot t} \\ &\dots \\ s^{(n)}(t) &= p^n \cdot e^{p \cdot t} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation, on aura  $b_n \cdot p_n \cdot e^{pt} + b_{n-1} \cdot p_{n-1} \cdot e^{pt} + \dots + b_0 \cdot e^{pt} = 0$ .

On peut aisément factoriser :

$$\begin{aligned} b_n \cdot p_n \cdot e^{pt} + b_{n-1} \cdot p_{n-1} \cdot e^{pt} + \dots + b_0 \cdot e^{pt} &= 0 \\ e^{pt} \cdot (b_n \cdot p_n + b_{n-1} \cdot p_{n-1} + \dots + b_0) &= 0 \end{aligned}$$

On sait qu'un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs au moins est nul, or comme une exponentielle ne peut pas s'annuler, ce ne va pas être lui qui pourra annuler cette expression, cela nous simplifie l'équation  $b_n \cdot p_n + b_{n-1} \cdot p_{n-1} + \dots + b_0 = 0$ .

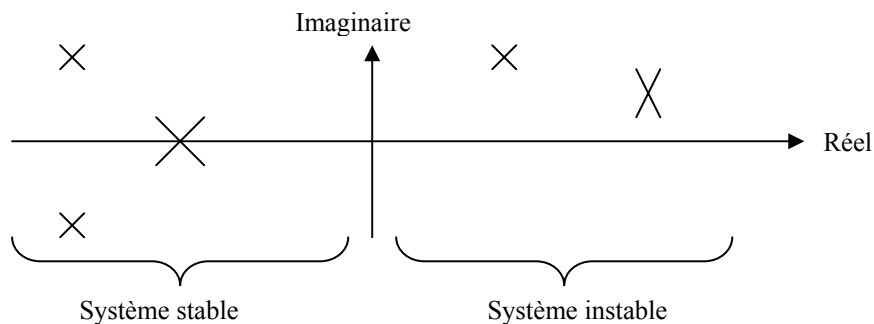
L'équation  $b_n \cdot p_n + b_{n-1} \cdot p_{n-1} + \dots + b_0$  est appelée 'équation caractéristique'. Les solutions de cette équation sont appelées les racines. Ces racines peuvent être :

- Simple, de la forme  $p_i = \alpha_i$
- Complexe, de la forme  $p_i = \alpha_i + j\beta_i$
- Double réelle, de la forme  $p_i = p_i = \alpha_i$

Les solutions seront alors de la forme :

- Racine simple  $s(t) = e^{\alpha_i t}$
- Racines complexes  $s(t) = c \cdot e^{\alpha_i t} \cdot \cos(\omega_i t) + d \cdot e^{\alpha_i t} \cdot \sin(\omega_i t)$
- Racines doubles réelles  $s(t) = (c \cdot t + d) \cdot e^{\alpha_i t}$

Le système sera stable, si  $\alpha_i$  est négatif. Ainsi  $e^{\alpha_i t}$  ne va pas tendre vers l'infinie. Ainsi le système à une réponse stable, si  $\Re(p_i) < 0$



### 5. Transformée de Laplace

Par définition, la transformée de Laplace est donnée par la formule :

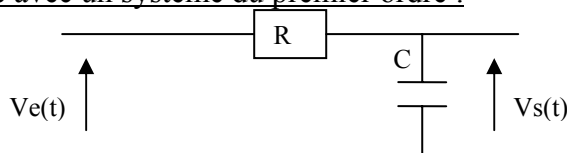
$$s(t) \xrightarrow{TL} S(P) \int_0^{+\infty} s(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

A l'usage cette formule s'avère compliquée à utiliser, c'est pourquoi on préfère utiliser des tables de Laplace, qui nous permettent de nous affranchir des calculs...

La transformée de Laplace est un outil pour résoudre les équations différentielles. Elle possède les propriétés suivantes :

- Linéarité :  $a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) \xrightarrow{TL} a \cdot S_1(p) + b \cdot S_2(p)$
- Dérivabilité :  $s'(t) \xrightarrow{TL} pS(p) - b \cdot S(t=0)$
- Intégrabilité :  $\int_0^T s(t) \xrightarrow{TL} \frac{s(p)}{p}$

Exemple avec un système du premier ordre :



Dans le domaine temporel, on a :

$$e - s = R.i$$

$$i = C. \frac{ds}{dt}$$

Passons maintenant dans le domaine de Laplace :

$$\left. \begin{array}{l} e - s = R.i \\ i = C. \frac{ds}{dt} \end{array} \right\} \xrightarrow{TL} \left. \begin{array}{l} E(p) - S(p) = R.I(p) \\ I(p) = C.p.S(p) \\ E(p) - S(p) = R.C.p.S(p) \end{array} \right\} \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RC.p}$$

Exemple avec un système du 2<sup>ème</sup> ordre :

Considérons l'équation différentielle suivante, et cherchons à la résoudre :

$$b_2. \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1. \frac{d^1 s(t)}{dt} + b_0. s(t) = a_2. \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + a_1. \frac{d^1 e(t)}{dt^1} + a_0. e(t)$$

Passons dans l'espace de Laplace :

$$b_2.p^2.s(p) + b_1.p.s(p) + b_0.s(p) = a_2.p^2.e(p) + a_1.p.e(p) + a_0.e(p)$$

$$[b_2.p^2 + b_1.p + b_0]s(p) = [a_2.p^2 + a_1.p + a_0]e(p)$$

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{[a_2.p^2 + a_1.p + a_0]}{[b_2.p^2 + b_1.p + b_0]}$$

## 6. Transformée de Fourier

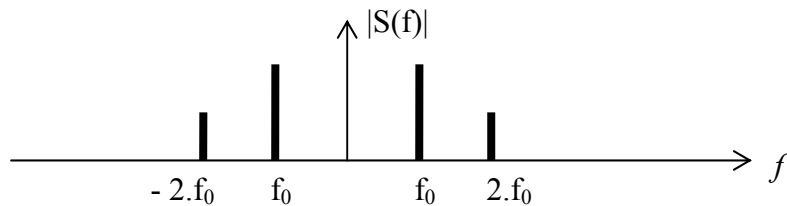
**Cas d'un signal périodique : Série de Fourier**

N'importe quel signal périodique peut s'écrire sous la forme d'une somme de sinusoïdes :

$$s(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_N.e^{j.n.w.t}$$

$$C_N(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} s(t).e^{-j.n.w.t} .dt$$

On obtient alors un spectre de raies (à chaque harmonique correspond une raie).

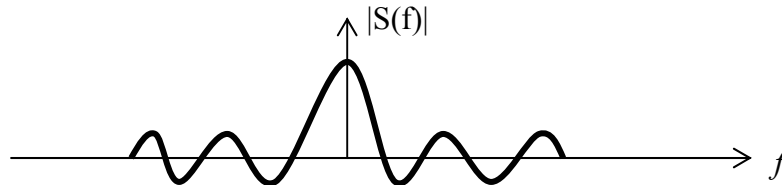


**Cas d'un signal non périodique : Transformée de Fourier**

Si le signal n'est pas périodique, cela reviendrait à dire que c'est un signal 'périodique' dont la période serait infini. On a alors une sommation continue :

$$s(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s(t).e^{-j.n.w.t} .dt$$

On obtient un spectre continu :



Intérêt de la transformée de Fourier :

La transformée de Fourier, permet, à partir de l'équation différentielle, d'obtenir facilement la réponse fréquentielle :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$$

Notons qu'il s'agit d'une fonction complexe, car un terme imaginaire intervient dans l'expression.

On retiendra aussi que l'on peut passer de la réponse fréquentielle, à la réponse impulsionnelle, par  $H(f) = TF(h(t))$ , où h(t) représente la réponse impulsionnelle.

7. Diagramme de Bode

C'est la représentation :

- du module de la réponse fréquentielle, soit  $G_{DB} = 20.\log|H(w)|$
- du déphasage entre la sortie et l'entrée, soit  $\varphi_{RAD}(w) = \arg(H(w))$

L'échelle des fréquences est logarithmique.

Il est d'usage en électronique, de faire des tracés asymptotiques. Les tracés réels étant réalisés via l'outil informatique (simulateur, ou calculateur mathématique).

Exemple de diagramme de Bode :

$$H(w) = \frac{1}{1 + j.w.\tau} \text{ avec } \tau = 1$$

Pour le module :  $|H(w)|^2 = \frac{1}{1^2 + w^2.\tau^2}$  (ne pas oublier qu'il n'y a pas de 'j'...)

$$G_{DB}(w) = 20.\log|H(w)|$$

$$G_{DB}(w) = 10.\log|H(w)|^2$$

$$G_{DB}(w) = 10.\log\left[\frac{1}{1 + w^2.\tau^2}\right]$$

$$G_{DB}(w) = 10.\log(1) - 10.\log(1 + w^2.\tau^2)$$

$$G_{DB}(w) = -10.\log(1 + w^2.\tau^2)$$

On peut ensuite passer à la représentation dans le diagramme de Bode, mais il faut retenir la solution de faciliter : faire un tracé asymptotique !

Si  $w \rightarrow 0$ , alors on peut simplifier l'expression du gain :

$$G_{DB}(w) = -10 \cdot \log(1 + w^2 \cdot \tau^2) \xrightarrow{w \rightarrow 0} G_{DB}(w) \approx -10 \cdot \log(1) = 0$$

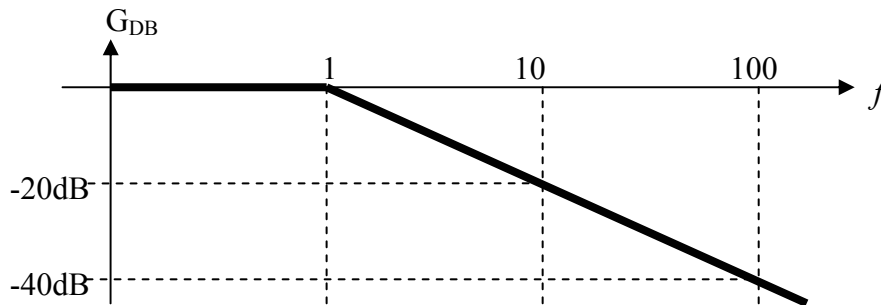
On a une asymptote horizontale qui vaut  $G = 0\text{dB}$ .

Si  $w \rightarrow +\infty$ , on peut aussi simplifier l'expression du gain :

$$G_{DB}(w) = -10 \cdot \log(1 + w^2 \cdot \tau^2) \xrightarrow{w \rightarrow +\infty} G_{DB}(w) \approx -10 \cdot \log(w^2 \cdot \tau^2) = -20 \cdot \log(w \cdot \tau) = -(20 \log(w) + 20 \log(\tau))$$

$$G_{DB}(w) = -20 \cdot \log(w) - 20 \cdot \log(\tau)$$

On a une asymptote qui a une pente de  $-20\text{dB}$  par décade.



Pour la phase, on fait  $\varphi(w) = -\tan^{-1}(w \cdot \tau)$ , et on obtient :

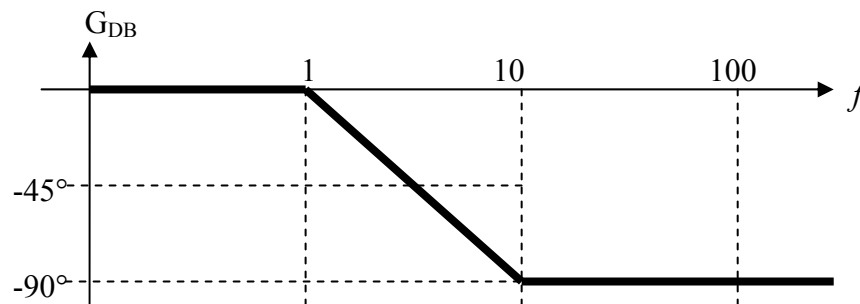


Diagramme de Nyquist : Il s'agit d'une représentation dans un plan complexe (l'axe des abscisses est réel, et l'axe des ordonnées est imaginaire), mais cette représentation est inusité en filtrage...

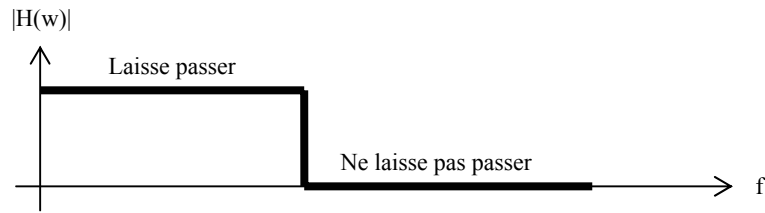




## Filtrage analogique. [CHAPITRE 2]

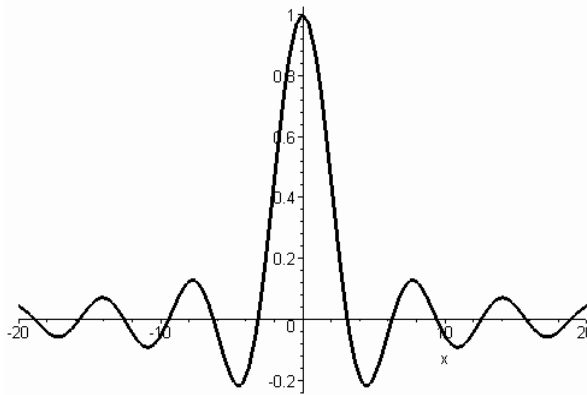
### 1. Notion de filtre idéal

Considérons le gabarit d'un filtre idéal :



On sait, d'après ce que l'on a vu au précédent chapitre que  $H(w) = TF(h(t))$ , donc si on veut la réponse impulsionnelle, on prendra la transformée inverse de Fourier, soit  $h(t) = TF^{-1}(H(w))$ .

Or si on fait la transformée de Fourier inverse à ce filtre idéal, on va obtenir un sinus cardinale :



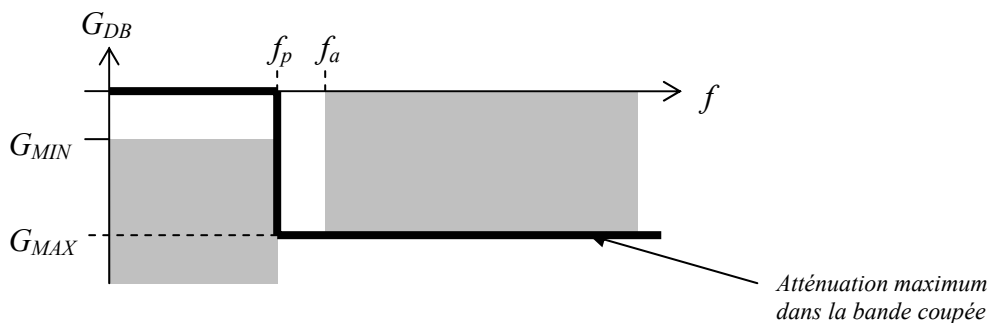
Or, comme on peut le constater, la réponse n'est pas causale (l'axe des abscisses représente le temps). En effet, il s'agit là d'une réponse impulsionnelle (on applique une impulsion en  $t=0$ , et on observe les conséquences sur le signal). Sur cette figure, on observe que l'effet est obtenu avant la cause, car la fonction n'est pas nulle avant l'impulsion (qui serait en  $t=0$ ), donc :

- Le système n'est pas causal
- Le filtre n'est physiquement pas réalisable
- Le filtre idéal n'existe pas...

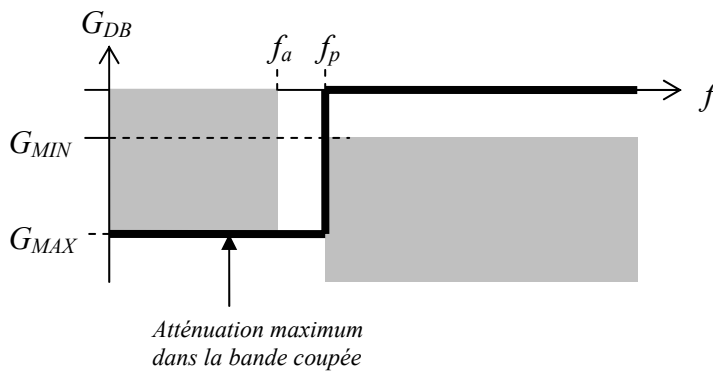
### 2. Notion de gabarit de filtre

On définit donc un gabarit à l'intérieur duquel doit se situer la fonction de transfert du filtre. Dans ce cours on adoptera une convention qui veut que l'on hachure la zone interdite.

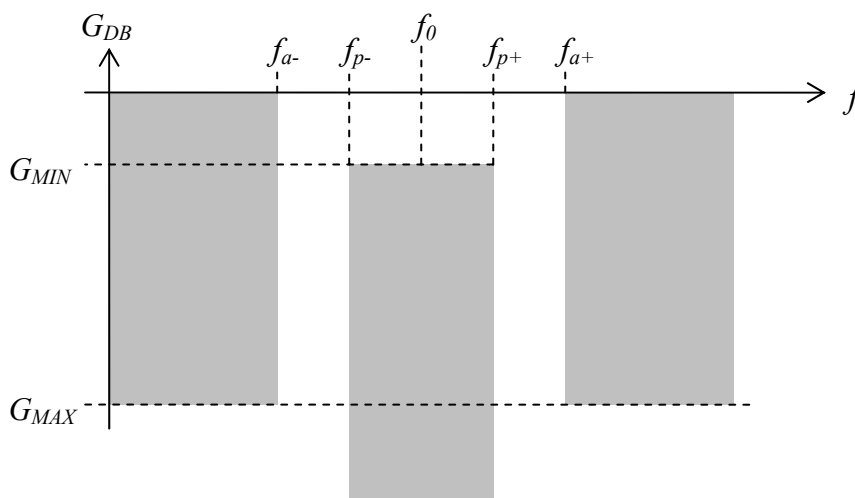
#### a) Gabarit du filtre passe bas



b) Gabarit d'un filtre passe haut



c) Gabarit d'un filtre passe-bande



3. Sélectivité d'un filtre

La sélectivité définit la rapidité que possède un filtre à atténuer (en d'autres termes, 'sa raideur') :

Type de filtre	Sélectivité
Passé bas	$k = \frac{f_p}{f_a}$
Passé haut	$k = \frac{f_a}{f_p}$
Passé bande	$k = \frac{f_{p+} - f_{p-}}{f_{a+} - f_{a-}}$
Coupe bande	$k = \frac{f_{a+} - f_{a-}}{f_{p+} - f_{p-}}$

Pour un filtre idéal, on a  $k = 1$ .

4. Normalisation des filtres

En filtrage, on procède à des normalisations, pour obtenir des expressions que l'on peut comparer. Par exemple, en  $f_N = 1$ , tous les filtres d'ordre différent auront des asymptotes se coupant au même point  $f_N$ . On peut normaliser soit la fonction de transfert, soit les impédances des circuits.

a) Normalisation de la fréquence

La première étape consiste à choisir une fréquence de référence, ce sera par rapport à cette fréquence que l'on normalisera.

Il ne faut pas confondre :

- La fréquence de normalisation (fréquence par rapport à laquelle on normalise)
- La fréquence normalisée (qui est le résultat du rapport de la fréquence sur la fréquence de normalisation).

Fréquence normalisée	$f_{NORMALISEE} = \frac{f}{f_{NORMALISATION}}$
Pulsation normalisée	$w_{NORMALISEE} = \frac{w}{w_{NORMALISATION}} = 2.\pi.f_{NORMALISEE}$
P normalisé (Laplace)	$P_{NORMALISEE} = \frac{P}{w_{NORMALISATION}}$

Exemple avec un filtre passe bas :

Soit  $H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{w_{COUPURE}}}$

On décide que la pulsation de normalisation est  $w_{NORMALISATION} = w_{COUPURE}$ .

On aura  $P_{NORMALISEE} = \frac{P}{w_{COUPURE}}$ , soit en remplaçant dans l'expression :

$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{w_{COUPURE}}} = \frac{1}{1 + P_{NORMALISEE}}$ , il convient de remarquer que l'on a toujours la

même expression, seules les variables ont changées.

**ATTENTION :** Il ne faut jamais oublier de préciser, par rapport à quelle fréquence on normalise.

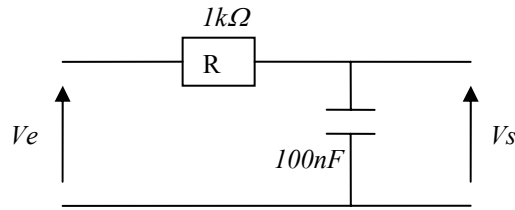
b) Normalisation des impédances

Il faut en premier lieu définir une impédance de référence, que l'on notera 'R<sub>0</sub>' (c'est en générale l'impédance de sortie du générateur, mais ce peut en être une autre).

Résistance	$r_{NORMALISEE} = \frac{R}{R_0}$
Inductance	$z_L^{NORMALISEE} = \frac{Z_L}{R_0} = j.\frac{L.w}{R_0}$
	$z_L^{NORMALISEE} = j.\frac{L.w_0}{R_0}.\frac{w}{w_0}$ où $\ell = L.\frac{w_0}{R_0}$
	$z_L^{NORMALISEE} = j.\ell.w_{NORMALISEE}$
Capacité	$Z_C = \frac{1}{j.C.w} = \frac{1}{j.C.w_0.\frac{w}{w_0}}$
	$z_C^{NORMALISEE} = \frac{Z_C}{R_0} = \frac{1}{j.C.R_0.w_0.w_{NORMALISEE}}$ où $c = R_0.C.w_0$
	$z_C^{NORMALISEE} = \frac{1}{j.c.w_{NORMALISEE}}$

Exemple de normalisation d'impédance :

Soit le circuit RC suivant :



On choisit des références :

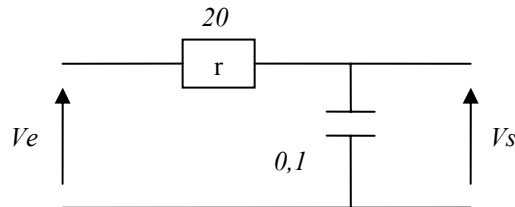
- Impédance de référence  $R_0 = 50\Omega$
- Pulsation de référence  $\omega_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$

On normalise les éléments du filtre :

$$r_{NORMALISEE} = \frac{R}{R_0} = \frac{1k\Omega}{50\Omega} = 20$$

$$c_{NORMALISEE} = R_0 \cdot C \cdot \omega_0 = 50 \cdot (100 \cdot 10^{-9}) \cdot (2 \cdot 10^{-4}) = 0,1$$

On redessine le filtre normalisé :



On détermine sa fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

On choisit de normaliser pour  $\omega_{NORMALISATION} = 2 \cdot \omega_0$ .

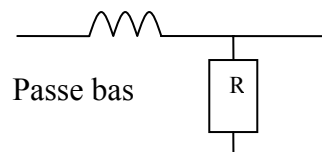
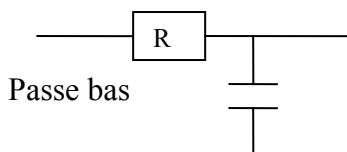
$$\text{Donc } p_{NORMALISEE} = \frac{p}{\omega_{NORMALISATION}} = \frac{p}{2 \cdot \omega_0} = \frac{p}{2 \cdot RC}$$

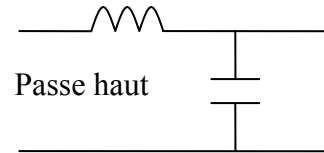
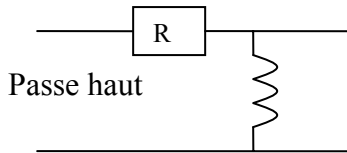
$$\text{Soit } H(p) = \frac{1}{1 + 2 \cdot p_{NORMALISEE}}$$

5. Transposition de fréquences

Afin de faciliter la réalisation électronique des filtres, il existe des tables de valeurs pré-établies, qui nous permettent de nous affranchir des calculs. Or étant ces valeurs ont été calculé pour des filtre passe-bas. Il existe des recettes pour passer d'un filtre passe-haut, passe-bande, coupe bande, à un filtre passe-bas.

a) Transposition du filtre passe-bas au filtre passe-haut (et vis et versa)





On remarque que les structures ‘passe-bas’ et les structures ‘passe-haut’ sont parfaitement similaires, à la différence près que lorsqu’une structure à un condensateur, l’autre à une bobine, mais les éléments résistifs ont toujours la même place.

Pour passer d’une structure à une autre, il suffit de faire la transposition  $p_N \rightarrow \frac{1}{p_N}$ .

Capacité	$\left. \begin{array}{l} z_C = \frac{1}{c \cdot p_N} \\ z_C = \ell \cdot p_N \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{TRANSPOSITION...}} z = \frac{p_N}{c} \Leftrightarrow \ell' = \frac{1}{c}$
Inductance	$\left. \begin{array}{l} z_\ell = \ell \cdot p_N \\ z_\ell = \frac{1}{c'} \cdot p_N \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{TRANSPOSITION...}} z = \frac{\ell}{p_N} = \frac{1}{c' \cdot p_N} \Leftrightarrow c' = \frac{1}{\ell}$

Exemple de transposition de fonction de transfert :

Soit la fonction de transfert d’un passe-bas  $H(p_N) = \frac{1}{1 + 2 \cdot p_N}$

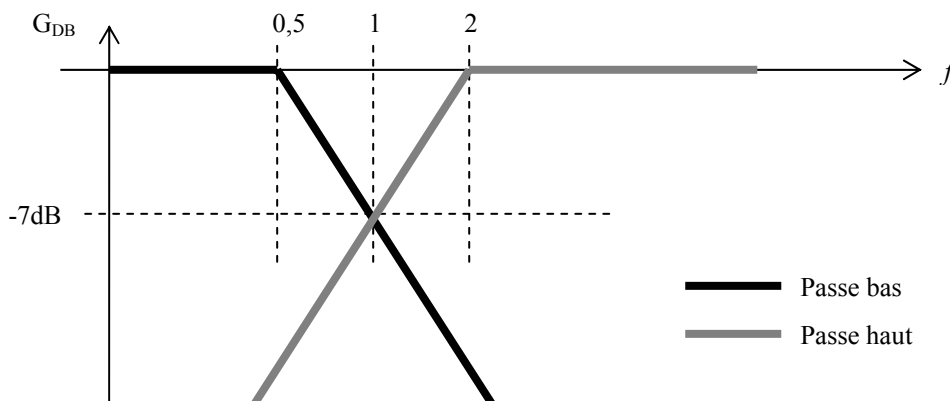
On veut obtenir la fonction de transfert d’un passe-haut, en transposant.

On transpose en faisant :  $p_N \xrightarrow{\text{TRANSPOSITION...}} \frac{1}{p_N}$

$$H(p_N) = \frac{1}{1 + 2 \cdot p_N} \xrightarrow{\text{TRANSPOSITION...}} \frac{1}{1 + \frac{2}{p_N}} = \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{p_N}} \right) \cdot \frac{p_N}{p_N} = \frac{p_N}{p_N + 2} = \frac{p_N / 2}{1 + p_N / 2}$$

On a bien l’expression d’un filtre passe-haut.

Traçons les diagrammes de Bode associée à ces fonctions :



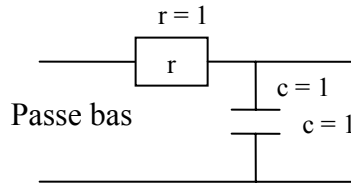
On constate que les deux courbes se coupent au même point (qui est calculé en faisant la moyenne géométrique des fréquences de coupures).

Exemple de la synthèse d'un filtre passe-haut :

On décide de fabriquer un filtre passe-haut tel que  $F_p = 1\text{kHz}$  à  $-3\text{dB}$ .

On part d'un filtre passe bas normalisé :

$$H(p) = \frac{1}{1 + p_N}$$

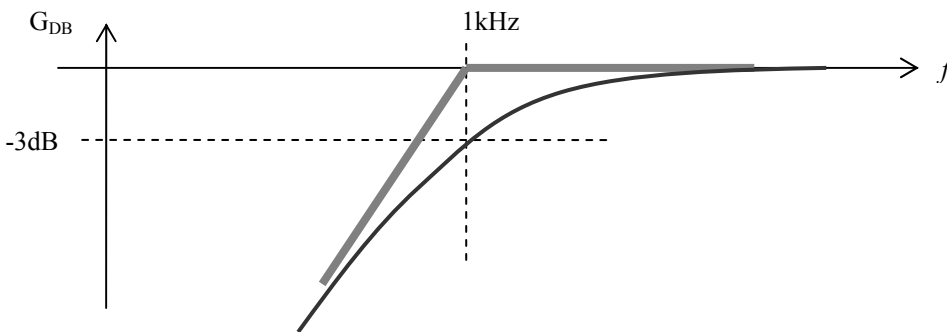


On réalise la transposition, pour avoir le passe-haut :

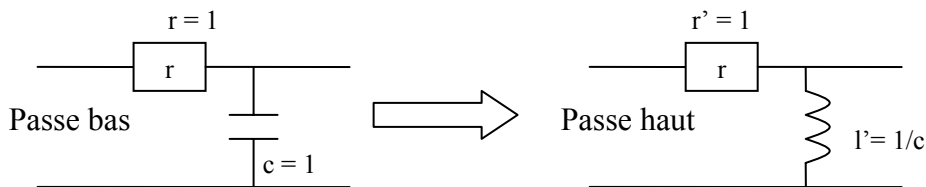
$$H_{BAS}(p) = \frac{1}{1 + p_N} \xrightarrow{\text{TRANSPOSITION...}} H_{HAUT}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{p_N}} = \frac{p_N}{1 + p_N}$$

$$H_{HAUT}(p) = \frac{p_N}{1 + p_N} \xrightarrow{p_N = P/w_N} H_{HAUT}(p) = \frac{P/w_N}{1 + \frac{P}{w_N}}$$

Traçons le diagramme de Bode de notre passe-haut :



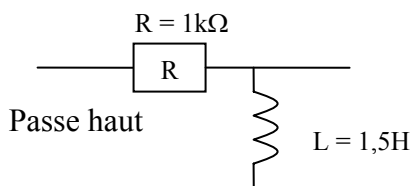
Dénormalisons le filtre, pour avoir les valeurs de composants :



$R = r \cdot R_0$ , donc on va choisir  $R_0 = 10\text{k}\Omega$ , soit  $R = 10\text{k}\Omega$ .

$$l' = L' \cdot \frac{w_0}{R_0} \Rightarrow L' = l' \cdot \frac{R_0}{w_0} = \frac{1}{c'} \cdot \frac{R_0}{w_0}, \text{ soit } L' = \frac{1}{c'} \cdot \frac{R_0}{w_0} \Leftrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot \pi \cdot 10^3} = 1,5\text{H}$$

On conclut sur le filtre synthétisé :



On notera que l'on aurait pu choisir une autre valeur de  $R_0$ , mais cela influe sur la valeur de l'inductance.

b) Transposition du filtre passe-bas au filtre passe bande

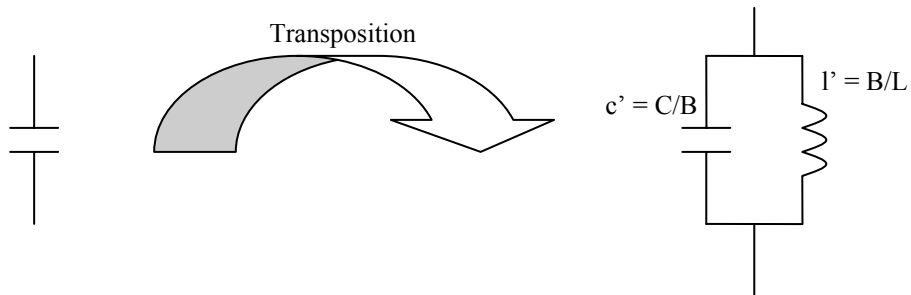
Pour une capacité parallèle, on aura :

$$z_c = \frac{1}{c \cdot p_N}$$

$$z = \frac{B}{C \cdot (p_N + \frac{1}{C \cdot p_N})} = \frac{1}{\frac{C}{B} \cdot p_N + \frac{1}{B} \cdot p_N} = \frac{1}{c' \cdot p_N + \frac{1}{\ell' \cdot p_N}}$$

Où  $c' = \frac{C}{B}$  et  $\ell' = \frac{B}{L}$ , et  $B = \frac{f_{0+} - f_{0-}}{f_0}$ .

Ce qui revient à associer une capacité en parallèle à une inductance :



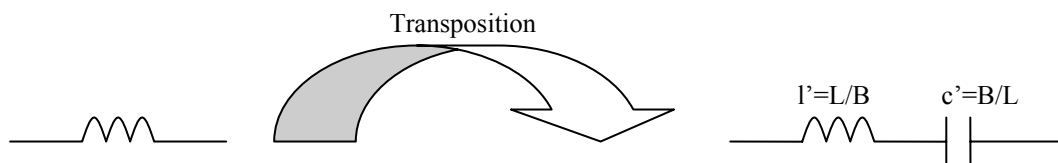
Pour une inductance en série, on aura :

$$zL = \ell \cdot p_N$$

$$z = \frac{\ell}{B} \left( p_N + \frac{1}{p_N} \right)$$

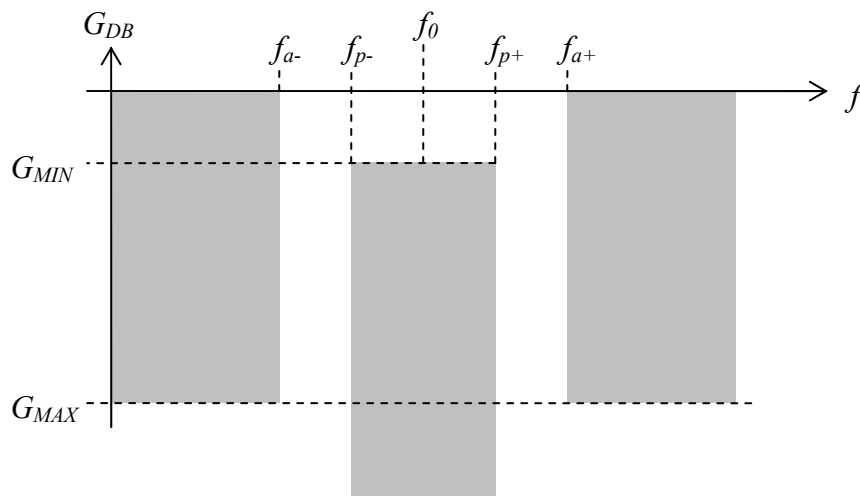
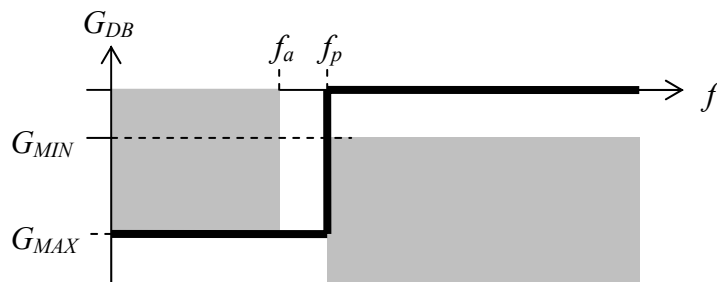
$$z = \ell' \cdot p_N + \frac{1}{c' \cdot p_N}$$

Où,  $c' = \frac{B}{L}$  et  $\ell' = \frac{L}{B}$ , et  $B = \frac{f_{0+} - f_{0-}}{f_0}$ .



Remarque : On choisira  $B = \frac{w_P}{w_0} = \frac{f_P}{f_0}$  où  $f_P$  est la fréquence du passe-bas, et  $f_0$  la fréquence de référence du passe-bande. On a  $f^*_1 - f_1 = f_P$ .

En faisant la transposition du gabarit, on aura :



c) Transposition passe-bas vers passe-bande

On s'intéressera simplement aux conclusions, et non à la démonstration, car les coupes bande sont inusités dans ce cours.

Un condensateur en parallèle se transpose en une inductance série.

Un conducteur et une bobine en série se transposent en un condensateur en parallèle avec une bobine.



### Filtrage analogique. [CHAPITRE 3]

#### 1. Propriété de la fonction de transfert H(p) :

Considérons un système du n<sup>ième</sup> ordre, linéaire, et invariant :



On peut écrire l'équation différentielle :

$$b_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 \cdot s(t) = a_n \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 \cdot e(t)$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$H(w) = H(p = j.w) = \frac{a_N (jw)^m + \dots + a_0}{b_N (jw)^n + \dots + b_0} = \frac{N(w)}{D(w)}$$

On retiendra quatre propriétés remarquables :

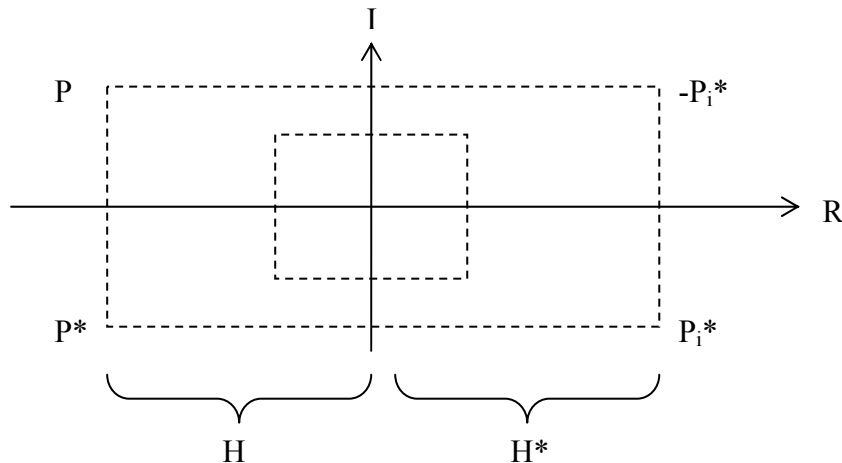
- ◆  $H^*(w) = H(jw)$
- ◆  $|H(w)| = \frac{\sqrt{N_1^2 + w^2 \cdot N_2^2}}{\sqrt{D_1^2 + w^2 \cdot D_2^2}}$
- ◆ Le système est stable, si les pôles de H(p) sont à racines réelles négatives.
- ◆ On veut que le système soit à déphasage minimum, il est donc nécessaire que les zéros de H(p) soient à partie réelle négative.

#### 2. Pôles et zéros de H(p)

Soient  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$  les pôles de H(p). Soient  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$  les zéros de H(p). On peut écrire la fonction de transfert, en fonction des pôles et des zéros :

$$H(jw) = H(p)|_{p=j.w} = \frac{(j.w - z_1) \cdot (j.w - z_2) \cdot \dots \cdot (j.w - z_N)}{(j.w - p_1) \cdot (j.w - p_2) \cdot \dots \cdot (j.w - p_N)}$$

On représente les pôles et les zéros, dans un plan :



$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) = (-1)^{m+n} \cdot \frac{(j\omega + z_1)(j\omega + z_2)\dots(j\omega + z_N)}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)\dots(j\omega + p_N)}$$

$$|H(j\omega)|^2 = H.H^*$$

Il y a une symétrie quadrantale des pôles et des zéros de  $|H|^2$ .

3. Détermination des pôles et des zéros d'une fonction H(p)

Considérons la fonction  $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+2.\omega^2}$ .

Déterminons  $H(p).H(-p) = \frac{1}{1+2(-p)^2} = \frac{1}{1+2.p^4}$

Cherchons les pôles de H(p).H(-p) :

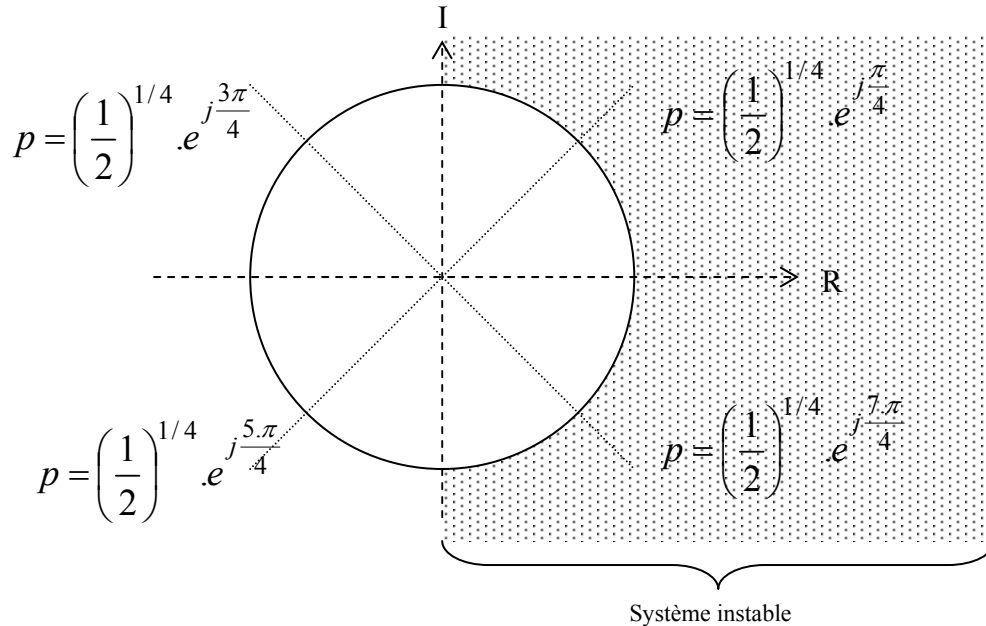
$$1+2.p^4 = 0$$

$$p^4 = \frac{-1}{2} . e^{j.2.k.\pi}$$

$$p^4 = \frac{1}{2} . e^{j(2k+1)\pi}$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} . e^{j(2k+1)\frac{\pi}{4}}$$

On peut représenter ces pôles sur un cercle trigonométrique :



On a donc :  $H(p) = K . \frac{1}{(p - p_1).(p - p_1^*)} = \frac{K.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.p^2 + 8^{1/4}.p + 1}$ , avec  $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .



**Filtrage analogique. [CHAPITRE 4]**

1. Les filtres de BUTTERWORTT :

Les filtres de Butterworttt ont la réponse la plus plate possible dans la bande passante : il est ainsi transparent pour le système.

On retiendra donc que :  
Butterworttt = réponse la plus plate possible dans la bande passante.

Pour le montrer, il suffit de considérer  $|H|^2 = \frac{1}{A^2}$ , où l'on a :

$$A^2(w) = a_N \cdot w^{2N} + a_{N-1} \cdot w^{2(N-1)} + \dots + 1$$

$$A^2(w) = a_N \cdot x^N + a_{N-1} \cdot x^{N-1} + \dots + 1 \text{ où } x = w^2$$

On va ensuite chercher à annuler toutes les dérivées à l'origine (dans le but d'avoir la réponse la plus plate possible) :

$$\left. \frac{dA^2}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$$

$$\left. \frac{d^2 A^2}{d^2 x} \right|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \dots \Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

$$\left. \frac{d^{(n)} A^2}{d^{(n)} x} \right|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \dots \Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow a_N = 0$$

Au final, il ne reste plus que  $A^2 = a_n \cdot x^n + 1 = a_n \cdot w^{2n} + 1$ , soit  $|H|^2 = \frac{1}{1 + a_n \cdot w^{2n}}$ .

On va maintenant chercher un  $w_p$ , tel que  $|H|^2 = \frac{1}{2}$ , (ce qui revient à dire que  $10 \cdot \log|H|^2 = -3\text{dB}$ ),

soit  $a_n \cdot w_p^{2N}$ , et donc  $w_p^{2n} = \frac{1}{a_n}$ , donc  $|H|^2 = \frac{1}{1 + \frac{w^n}{w_p^{2n}}}$ , avec  $w_n = \frac{w}{w_p}$  :

On retiendra l'expression de la fonction de transfert d'un filtre de Butterworttt :

$$|H|^2 = \frac{1}{1 + w_n^{2n}}$$

*Le 'n' en indice, indique que la pulsation est normalisée.  
Le 'n' en exposant, indique l'ordre du filtre (si n=3, on a un ordre 3...)*

Détermination de la fonction de transfert du filtre :

On désire réaliser un filtre d'ordre n=2 de Butterworttt : en d'autres termes on veut connaître l'expression de la fonction de transfert.

$$H(p_N) \cdot H(-p_N) = |H^2(w_N)|_{w_N=w_p} = \frac{1}{1 + (-p_N)^2} = \frac{1}{1 + (-1)^N \cdot P_N^{2N}}$$

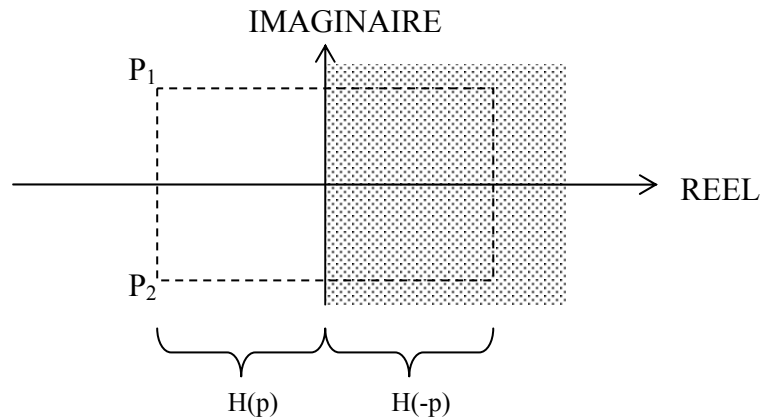
Pour notre filtre d'ordre 2, cela donne :

$$H(p_N) \cdot H(-p_N) = \frac{1}{1 + (-1)^2 \cdot P_n^{2 \cdot 2}} = \frac{1}{1 + P_n^4}$$

Il faut déterminer les pôles, qui seront donnés par la résolution de  $1 + p_n^4 = 0$  :

$$\begin{aligned}
 1 + p_n^4 &= 0 \\
 p_n^4 &= -1 \\
 p_n^4 &= -1 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi} \\
 p_n^4 &= e^{j \cdot (2 \cdot k + 1) \cdot \pi} \\
 p_n &= e^{j \cdot (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

Si on place ces pôles dans le plan complexe, on aura :



$$\left. \begin{aligned}
 H(p_n) &= \frac{K}{(p_n - p_1) \cdot (p_n - p_2)} \\
 p_1 &= e^{j \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4}} \\
 p_2 &= p_1^*
 \end{aligned} \right\} H(p_n) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot p_n + p_n^2} \text{ avec } w_n = 1, \text{ et } \xi = 0,707.$$

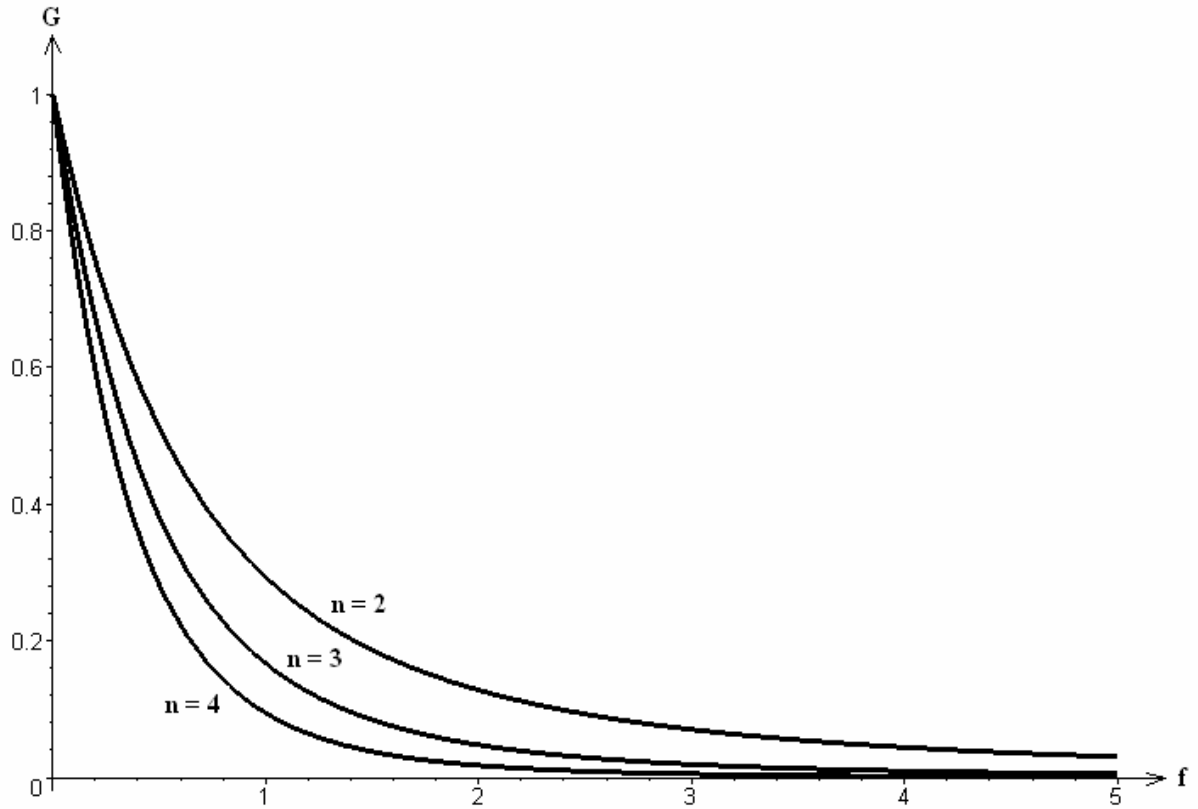
Afin de s'affranchir des calculs, il existe des tables qui regroupent les valeurs des coefficients, en fonction de l'ordre désiré.

Pour Butterworth, on se référera au tableau ci-dessous :

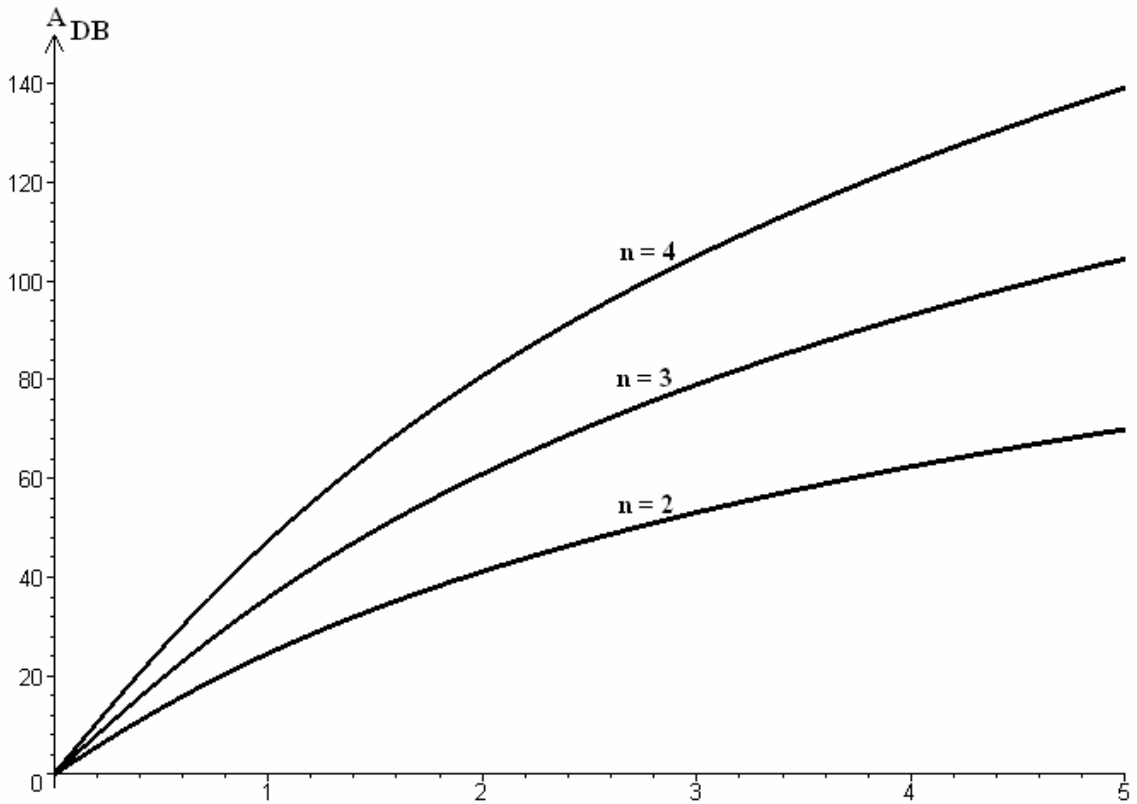
Ordre	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>
2	1	√2	1	*	*	*	*
3	1	2	2	1	*	*	*
4	1	2,6131	3,4142	2,6131	1	*	*
5	1	3,2361	5,2361	5,2361	3,2361	1	*
6	1	3,8637	7,4641	9,1416	7,4641	3,8637	1

$$B(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 + a_4 \cdot p^4 + a_5 \cdot p^5 + a_6 \cdot p^6 + \dots + a_n \cdot p^N}$$

Graphe représentatif du gain, en fonction de l'ordre :

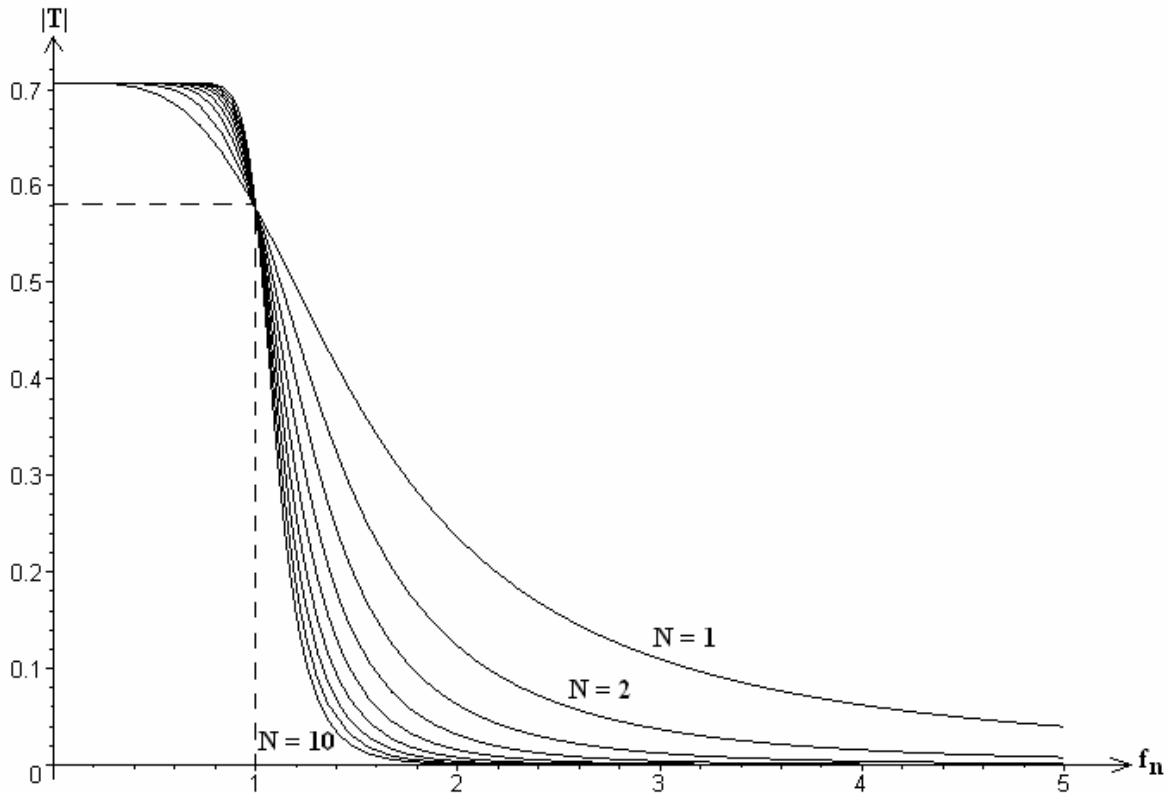


Si on s'intéresse à l'atténuation, et non au gain, on aura :



Comme on peut le voir, plus l'ordre est élevée est plus l'atténuation est importante.

Amortissement en fonction de l'ordre, avec  $\varepsilon = 1$ , tel que  $|T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + w^{2N}}}$  :



On voit sur cette figure que la pente est de  $-20 \cdot N$  dB/dec, et que tous les filtres passent par le même point en  $f_n = 1$  (soit -3dB).

Pour les filtres de Butterworth, on retiendra :

- Dans la bande passante, la réponse est la plus plate possible (il n'y a pas d'ondulation).
- En dehors de la bande transmise, et à des fréquences très supérieures à la fréquence de coupure, on retrouve les caractéristiques classiques d'un filtre d'ordre  $n$ , avec une croissance de  $20 \cdot n$  dB/dec.
- Quelque soit la valeur de l'ordre  $n$ , l'affaiblissement à la fréquence de coupure est de -3dB.
- La phase est assez linéaire (les signaux ne sont pas déformés).

2. Les filtres de CHEBYCHEFF

Les filtres de Butterworth ont une réponse très plate dans leur bande passante. Cependant lorsque l'on tolère une atténuation maximale dans la bande passante, il serait intéressant de laisser onduler l'atténuation le plus grand nombre de fois possible entre la valeur de  $A_{MAX}$  et 0dB, afin d'avoir une coupure assez raide. Pour ces filtres, l'imperfection qui constitue l'atténuation résiduelle en bande passante est uniformément répartie dans toute cette bande. Les filtres de Chebycheff présentent un grand intérêt pratique car de tous ces filtres polynomiaux, ce sont ceux qui présentent la coupure la plus brutale pour un ordre n donné. Cependant les inconvénients sont un temps de propagation de groupe peu constant, et une réponse transitoire trop agitée, ce qui provoque des distorsions par exemple dans les cas des signaux impulsionnels.

Le polynôme  $P_n(x)$  de Chebycheff d'ordre n est défini par  $P_n(x) = \Re[x + j\sqrt{1-x^2}]^n$ . Ce polynôme peut être représenté d'une autre façon :

$$P_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(x)) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \operatorname{argch}(x)) & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Les polynômes de Chebycheff obéissent à la relation de récurrence  $P_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x)$ . En utilisant les relations trigonométriques, et avec quelques lignes de calculs, on obtient les expressions des polynômes de Chebycheff :

n = 0	$P_0(x) = 1$
n = 1	$P_1(x) = x$
n = 2	$P_2(x) = 2 \cdot x^2 - 1$
n = 3	$P_3(x) = 4 \cdot x^3 - 3x$
n = 4	$P_4(x) = 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$
n = 5	$P_5(x) = 16 \cdot x^5 - 20 \cdot x^3 + 5 \cdot x$
n = 6	$P_6(x) = 32 \cdot x^6 - 48 \cdot x^4 + 18 \cdot x^2 - 1$

En utilisant les polynômes de Chebycheff, on peut définir un filtre de type polynomial dont la réponse est ondulatoire, à ondulation constante dans la bande passante. On peut donc écrire :

$$\frac{1}{|H|^2} = A^2(x) = 1 + \varepsilon^2 \cdot P_n^2(\Omega)$$

Avec  $\varepsilon$  qui caractérise l'amplitude maximale dans la bande passante.

Une fois les calculs faits, nous obtenons les coefficients correspondant soit à une ondulation de 0,1dB soit à une ondulation de 1dB :

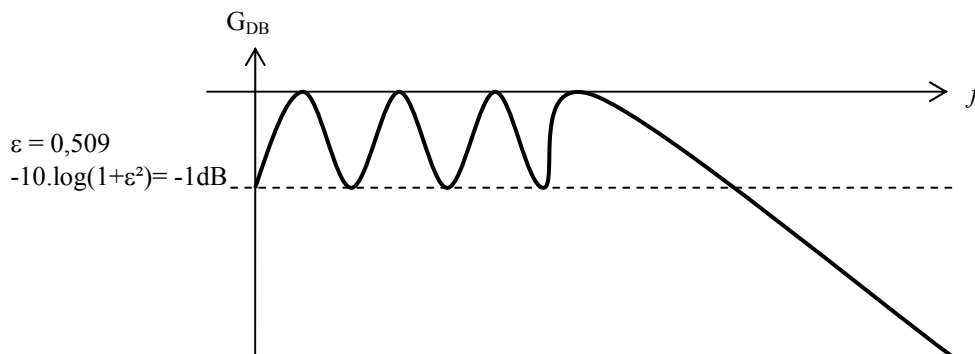
Pour une ondulation de 0,1dB dans la bande passante :

Ordre	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>
2	1	0.7158	0.3017	*	*	*	*
3	1	1.6052	1.1836	0.6105	*	*	*
4	1	2.4447	3.1705	2.1771	1.2069	*	*
5	1	3.5055	5.8531	6.7658	4.2586	2.4419	*
6	1	4.353	9.886	13.42	14.32	8.266	4.828

Pour une ondulation de 1dB dans la bande passante :

Ordre	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>
2	1	0.9957	0.907	*	*	*	*
3	1	2.5206	2.0116	2.0353	*	*	*
4	1	2.6942	5.2749	3.4568	3.628	*	*
5	1	4.7264	7.933	13.75	7.6271	8.1415	*
6	1	4.456	13.63	17.44	28.02	13.47	14.512

$$B(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 + a_4 \cdot p^4 + a_5 \cdot p^5 + a_6 \cdot p^6 + \dots + a_n \cdot p^N}$$



Pour les filtres de Chebycheff, on retiendra :

- Il y a des ondulations dans la bande passante.
- La coupure est très raide.
- La pente est de  $-20 \cdot n$  dB/dec
- Il y a 'n' ondulation dans la bande passante.
- La phase est moins linéaire que pour les filtres de Butterwort (il y a une légère déformation du signal).
- La coupure autour de  $f_p$  est plus raide que dans le cas de Butterwort.



### 3. Les filtres de LEGENDRE (*Papouli et Fukada*)

Ces filtres sont définis par  $|H|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot \ln(w_n^2)}$ . Les polynômes de Legendre sont un compromis entre les polynômes de Butterworth et de Chebychev.

La détermination des coefficients est relativement complexe, c'est pourquoi on se contentera des valeurs données dans le tableau ci-dessous :

Ordre	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>
2	1	$\sqrt{2}$	1	*	*	*	*
3	1	2.3537	2.2700	1.7319	*	*	*
4	1	3.0411	4.6253	3.8280	2.4493	*	*
5	1	4.017	7.5689	9.8529	6.9369	4.4710	*
6	1	4.8056	11.546	17.206	19.018	12.204	7.0702

$$B(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 + a_4 \cdot p^4 + a_5 \cdot p^5 + a_6 \cdot p^6 + \dots + a_n \cdot p^N}$$

Pour les filtres de Legendre, on retiendra :

- Il n'y a pas d'ondulation dans la bande passante.
- La coupure est plus raide que Butterworth, mais moins raide que Chebychev...

### 4. Les filtres de BESSEL

Ici on met l'accent sur le retard de propagation, que l'on cherche à avoir constant (on ne s'occupe pas vraiment de l'amplitude) :

$$H(p)e^{-\tau \cdot p}$$

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = E(p) \cdot e^{-\tau \cdot p}$$

$$S(p) = E(p) \cdot e^{-\tau \cdot p} \xrightarrow{TL^{-1}} s(t) = e(t - \tau)$$

Dans la bande passante, le filtre de Bessel va se conduire comme un retard.

Les coefficients sont donnés dans le tableau ci-dessous :

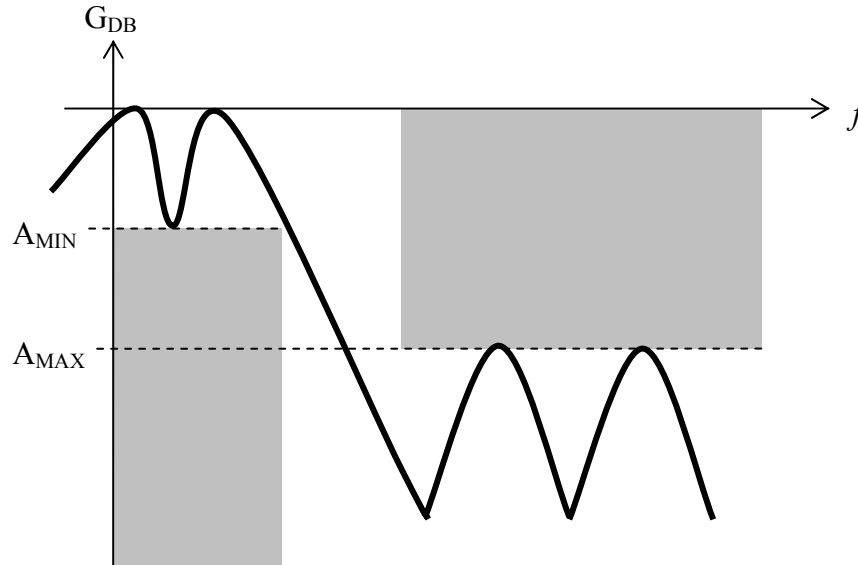
Ordre	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>
2	1	1.3616	0.618	*	*	*	*
3	1	1.7556	1.2328	0.3607	*	*	*
4	1	2.1138	1.9149	0.8995	0.1901	*	*
5	1	2.4266	2.6174	1.588	0.5506	0.0891	*
6	1	2.7033	3.3216	2.3944	1.0788	0.2916	0.0375

Pour les filtres de Legendre, on retiendra :

- La coupure n'est pas très raide
- La phase est très linéaire
- La pente est de -20.n dB/dec

5. Les filtres de CAUER (filtres non polynomiaux)

On appelle filtre de Cauer un filtre non polynomial qui a un « comportement de Tchebyscheff » aussi bien en bande passante qu'en bande affaiblie.



La mise en œuvre des calculs est assez compliquée, c'est pourquoi on se contentera des résultats donnés dans les tableaux ci-dessous :

$$A_{MIN} = 0,5\text{dB et } A_{MAX} = 40\text{dB}$$

Ordre	b <sub>0</sub> a <sub>0</sub>	b <sub>1</sub> a <sub>1</sub>	b <sub>2</sub> a <sub>2</sub>	b <sub>3</sub> a <sub>3</sub>	b <sub>4</sub> a <sub>4</sub>	b <sub>5</sub> a <sub>5</sub>	b <sub>6</sub> a <sub>6</sub>
3	1	0	0.1038	0	*	*	*
	1	0.2.0235	1.6404	1.3228	*	*	*
4	1	0	0.3993	0	0.0226	*	*
	1	2.2818	3.6938	2.4801	2.1035	*	*
5	1	0	0.8633	0	0.1642	0	*
	1	3.118	4.7536	6.6659	3.7273	3.2301	*
6	1	0	1.4029	0	0.5421	0	0.0412
	1	2.8728	6.4997	7.3627	9.4823	4.4452	3.8954

$$B(p) = \frac{b_0 + b_1 \cdot p^1 + b_2 \cdot p^2 + b_3 \cdot p^3 + b_4 \cdot p^4 + b_5 \cdot p^5 + b_6 \cdot p^6 + \dots + b_n \cdot p^N}{a_0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 + a_4 \cdot p^4 + a_5 \cdot p^5 + a_6 \cdot p^6 + \dots + a_n \cdot p^N}$$

Pour les filtres de Cauer, on retiendra :

- La coupure est très raide
- La phase n'est pas linéaire (les signaux sont assez déformés).



## Filtrage analogique. [CHAPITRE 5]

### 1. Introduction à la synthèse de filtres actifs

La connaissance du cahier des charges permet dans un premier temps de choisir l'ordre et le type de filtre à réaliser, puis dans un second temps de calculer sa fonction de transfert. Il faut distinguer les filtres actifs, des filtres passifs :

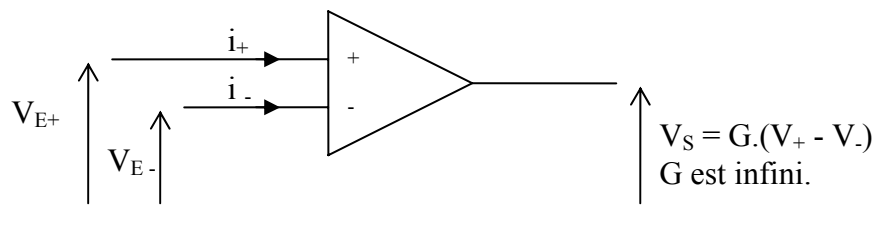
- les filtres actifs sont réalisés au moyen de résistances, de condensateurs et d'éléments actifs (AOP, transistors...). Ces filtres sont utilisables jusqu'à plus d'une centaine de kilohertz.
- les filtres passifs sont réalisés uniquement au moyen d'éléments passifs (résistance, condensateur, bobine). La puissance de sortie est toujours inférieure à la puissance d'entrée.

Les filtres actifs sont généralement caractérisés par des impédance d'entrée très élevées et des impédances de sortie très faibles, ce qui permet la mise en cascade de plusieurs cellules sans se soucier du problème d'adaptation. Les filtres actifs ont un inconvénient : le coefficient de surtension peut devenir très élevée : dans ce cas il y a risque d'oscillations spontanées.

Le but est maintenant d'étudier quelques procédés qui permettent de déterminer la structure la mieux adaptée pour la réalisation du filtre et enfin calculer les éléments (résistances, et condensateurs) grâce à l'utilisation de la fonction de transfert et de la connaissance de la structure. On se limite dans ce cours à synthétiser quelques filtres actifs qui utilisent des amplificateurs opérationnels. On suppose que chaque amplificateur opérationnel est idéal :

- gain en tension infini
- impédance d'entrée infinie
- impédance de sortie nulle
- bande passante infinie

### 2. Rappels sur les amplificateurs opérationnels

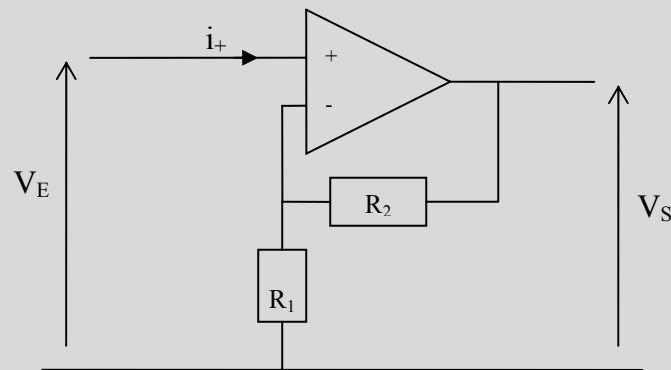


Pour que la tension de sortie ne soit pas infinie, il faut que  $V_+ = V_-$ .

De plus, les impédances d'entrée sont infinies, donc  $i_+ = i_- = 0$ .

L'amplificateur non inverseur :

Il faut se rappeler de cette structure, ainsi que de l'expression du gain associée :

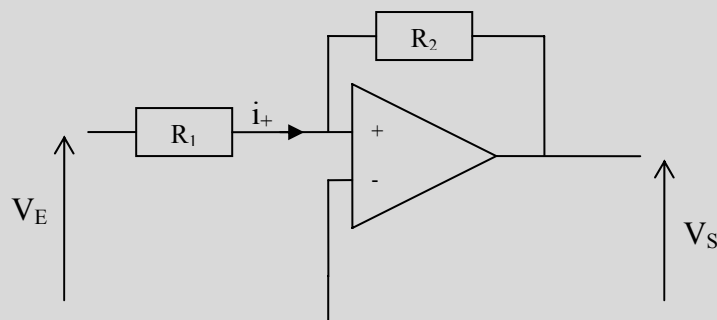


$$\left. \begin{array}{l} V_+ = V_- \\ V_- = e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot s \end{array} \right\} s = e \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

L'amplification est donnée par  $A = \frac{V_S}{V_E} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ .

L'amplificateur inverseur :

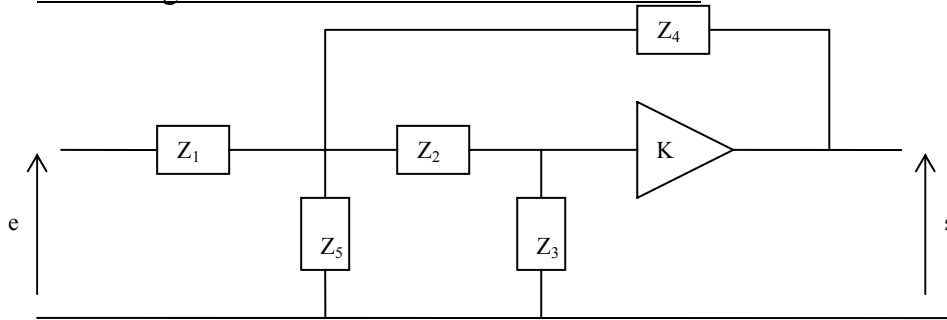
Il faut aussi se rappeler de cette structure !



$$\left. \begin{array}{l} V_+ = V_- = 0 \\ \frac{e}{R_1} = \frac{-s}{R_2} \end{array} \right\} s = -e \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

L'amplification est donnée par  $A = \frac{V_S}{V_E} = \frac{-R_2}{R_1}$ .

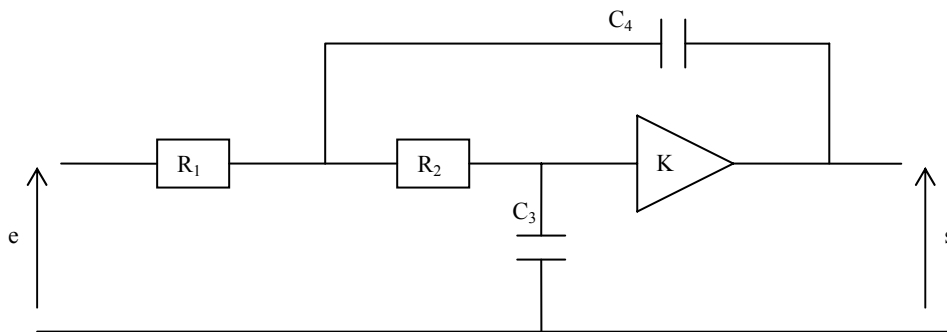
3. Structure générale des SALEN-KEY du 2<sup>ème</sup> ordre :



La fonction de transfert associé est :

$$H = \frac{K.Y_1.Y_2}{\left(Y_1 + Y_4 + Y_5 + \frac{1}{Z_2 + Z_3}\right).(Y_2 + Y_3) - K.Y_2.Y_4}$$

Filtre passe-bas de SALEN-KEY :



On a :

$$Z_1 = R_1$$

$$Z_2 = R_2$$

$$Y_3 = C_3.p$$

$$Y_4 = C_4.p$$

$$Z_5 = +\infty$$

$$H = \frac{K}{R_1.R_2.C_3.C_4.p^2 + [(R_1 + R_2).C_3 + R_1.C_4(1 - K)]p + 1}$$

Si maintenant, on pose :

$$R_1 = R_2 = R_0$$

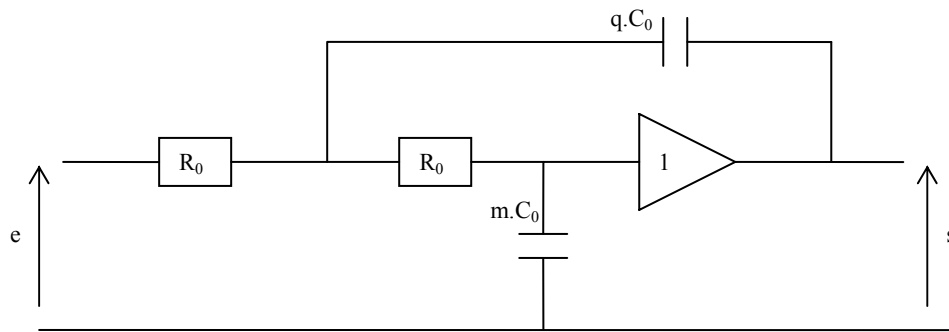
$$C_4 = m.C_0$$

$$C_3 = q.C_0$$

$$K = 1$$

La fonction de transfert est alors :  $H = \frac{1}{m.q(R_0.C_0)^2.p^2 + 2.m.R_0.C_0.p + 1}$ .

En mettant en forme cette expression, et en l'associant au schéma, on a :



$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{m.q(R_0.C_0)^2.p^2 + 2.m.R_0.C_0.p + 1} \\ H &= \frac{1}{\frac{p^2}{w_n^2} + 2.\xi.\frac{p}{w_n} + 1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} w_n &= \frac{1}{R_0.C_0.\sqrt{m.q}} & \xi &= \sqrt{\frac{m}{q}} & Q &= \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{q}{m}} \end{aligned}$$

Normalisation du filtre passe-bas de SALEN-KEY :

Impédance de référence :  $R_0$

Pulsation de référence :  $w_0 = 1/(R_0.C_0)$

Pour le condensateur, on aura :  $Z_{c_0} = \frac{ZC_0}{R_0} = \frac{1}{R_0.C_0.p} = \frac{1}{p_n} \Rightarrow c_0 = 1$

Cela va considérablement simplifier les choses :

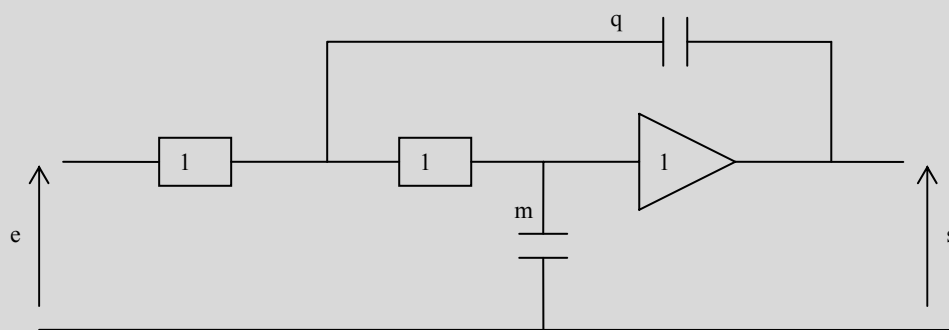
$R_0 \rightarrow 1$

$C_0 \rightarrow 1$

$m.c_0 \rightarrow m$

$q.c_0 \rightarrow q$

Pour le passe-bas de SALEN-KEY on retiendra la structure, et l'expression :



$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{m.q.p_n^2 + 2.m.p + 1} \\ H &= \frac{1}{\frac{p^2}{w_n^2} + 2.\xi.\frac{p}{w_n} + 1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} w_n &= \frac{1}{\sqrt{m.q}} & \xi &= \sqrt{\frac{m}{q}} & Q &= \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{q}{m}} \end{aligned}$$

Exemple 1 d'application : On désire réaliser un filtre passe-bas de Butterworth avec une structure de SALEN-KEY.

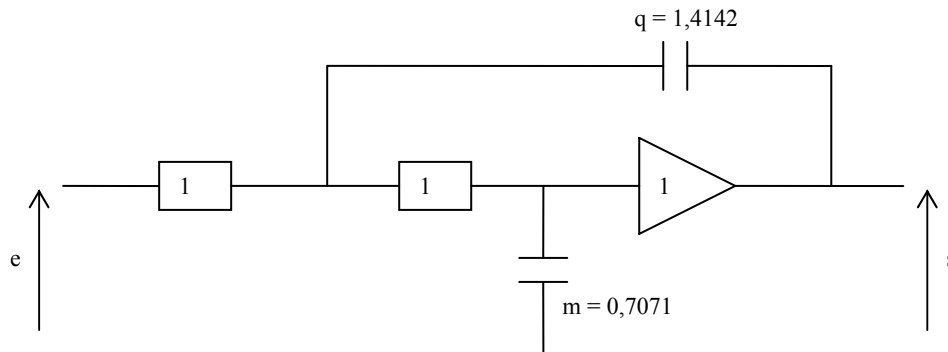
La première étape va consister à regarder dans une table, la valeur des divers coefficients (m et q) :

$$m = 0,7071$$

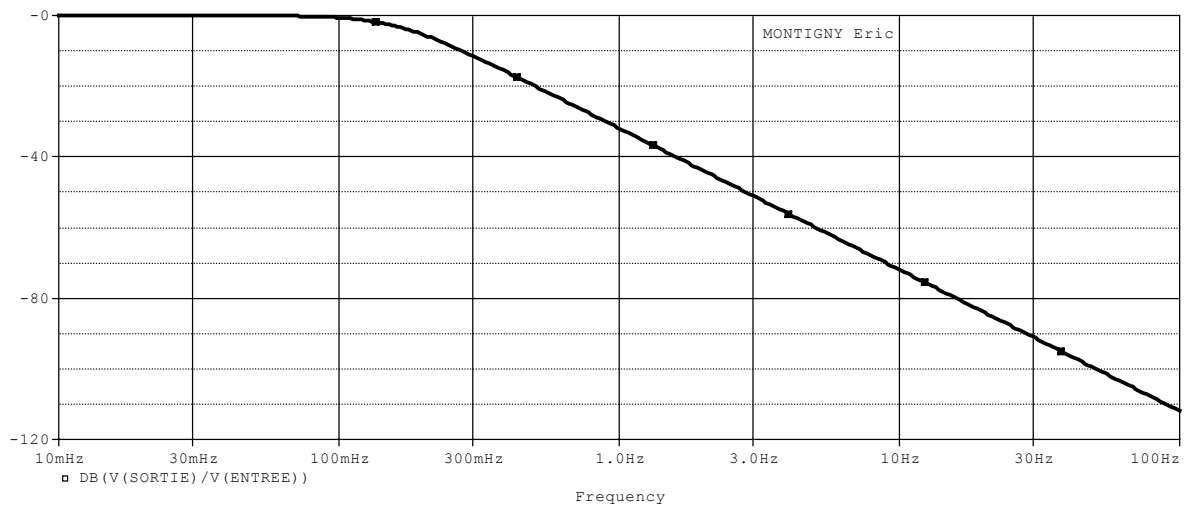
$$q = 1,4142$$

La fonction de transfert est de la forme  $H(p) = \frac{1}{p_n^2 + 1,4142.p_n + 1}$ .

En réalisant le filtre, on obtiendra la structure suivante :



En simulant avec l'outils informatique, on arrive au diagramme de Bode :



On constate que c'est un filtre passe-bas, et que la pente tend vers -20dB/dec, ce qui est conforme aux attentes théoriques.

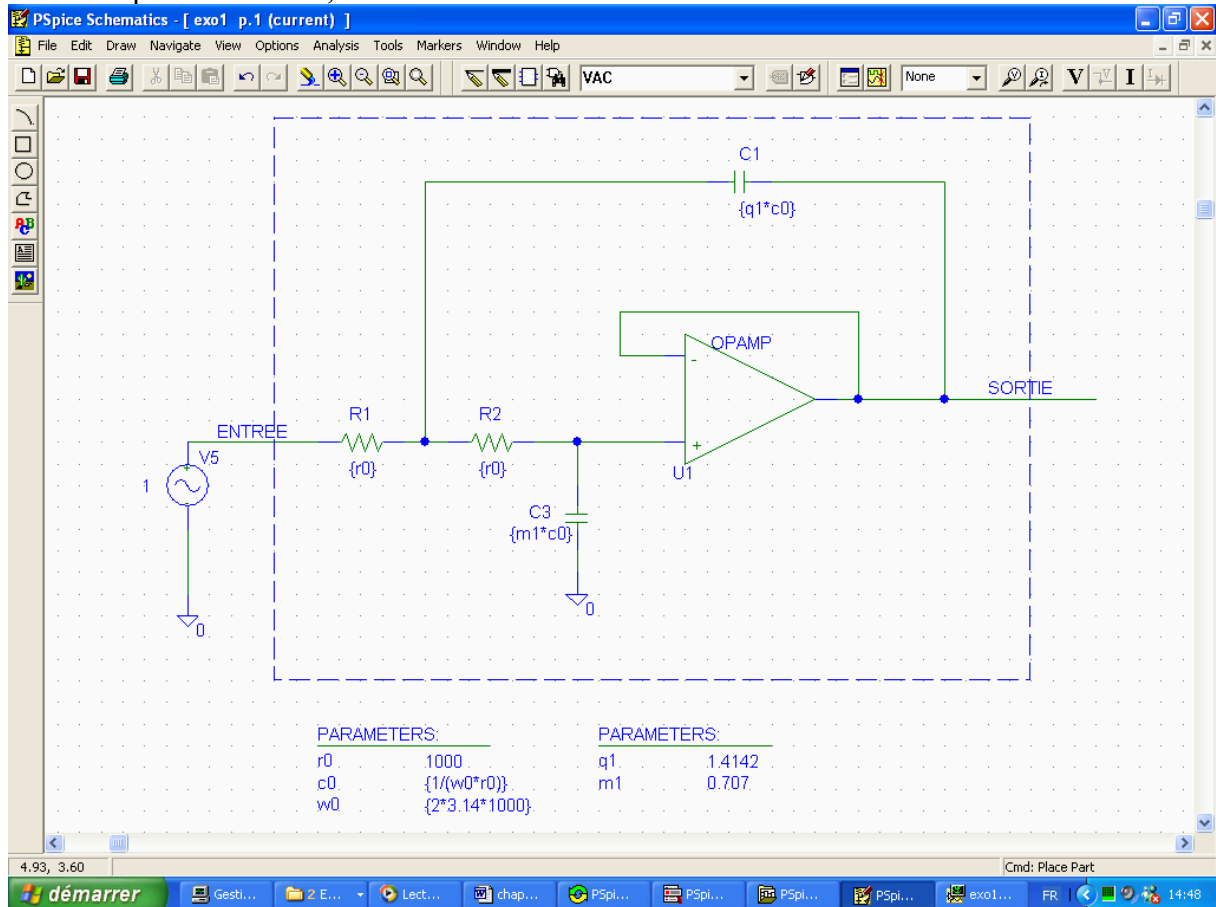
Notons qu'il s'agit ici d'un filtre normalisé. Il va maintenant falloir procéder à la dénormalisation, afin d'aboutir à des valeurs de composants.

Considérons que :  $f_0 = 1\text{kHz}$  (soit  $\omega_0 = 2.\pi.1000$ )

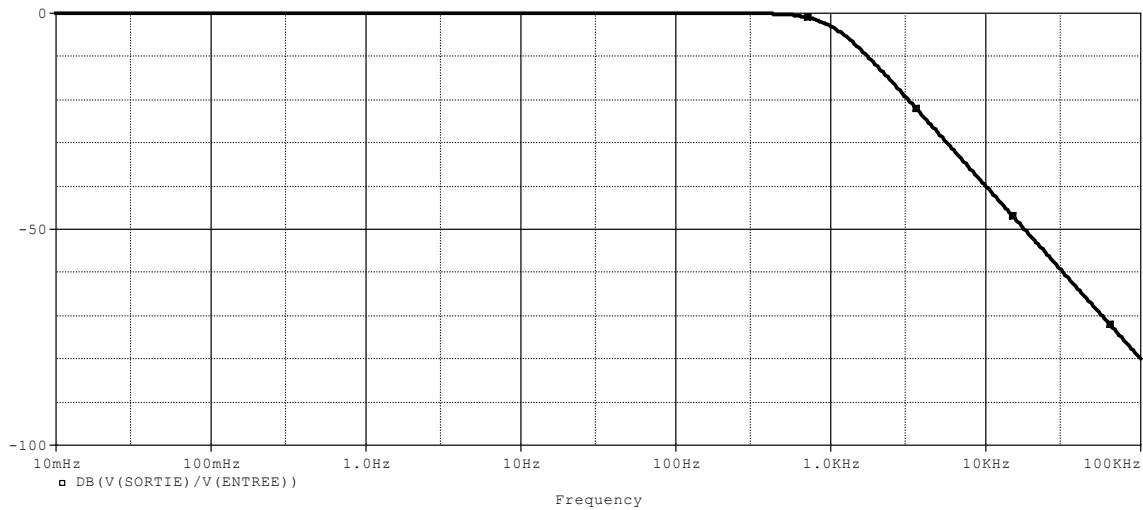
$$R_0 = 1\text{k}\Omega$$

$$C_0 = 1/(R_0.\omega_0) = 159\text{nF}$$

Voici ce que l'on obtient, avec la simulation :



Le diagramme de Bode associé est conforme à celui attendu (au niveau de  $f_c$ ) :



$$C_1 = 225\text{nF}$$

$$C_2 = 112.5\text{nF}$$

$$R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$$



Exemple 2 d'application : Nous voulons maintenant réaliser un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 4, reposant sur une structure de Salen-Key.

Etant donné que l'on sait qu'un étage a un ordre 2, pour avoir un ordre 4, il faudra donc cascader deux structures du même type, mais qui n'auront pas forcément les mêmes coefficients.

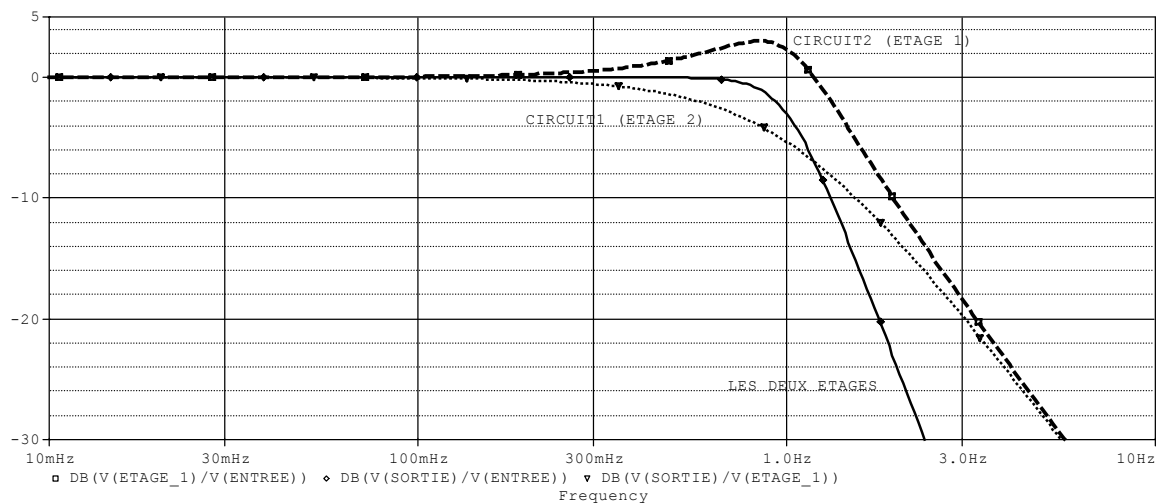
Référons-nous au table, pour connaître les valeurs des coefficients ( $m_1, q_1$  et  $m_2, q_2$ ) :

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,9328 \\ q_1 &= 0,3826 \\ m_2 &= 1,0823 \\ q_2 &= 2,6131 \end{aligned}$$

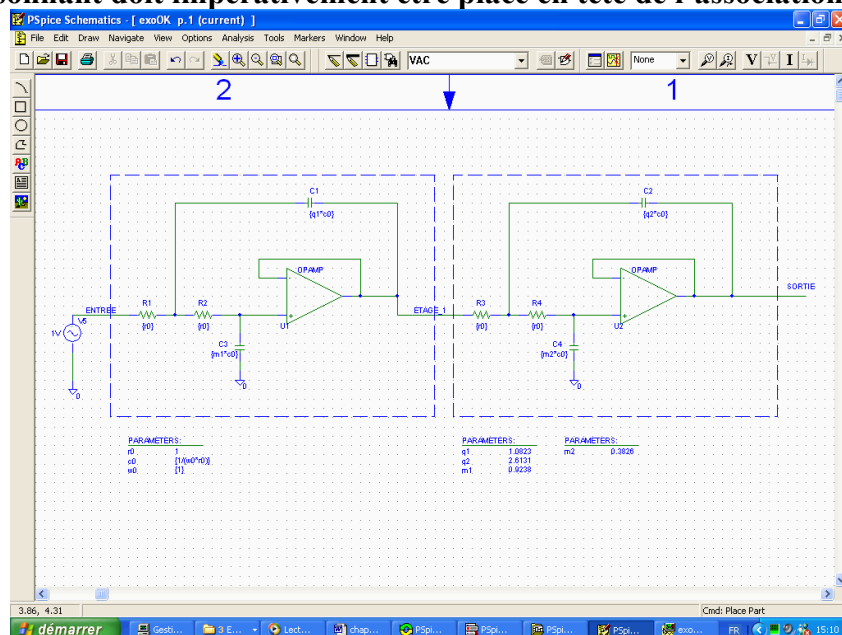
$$\text{La fonction de transfert va s'écrire : } H(p) = \left\{ \frac{1}{p^2 + 1.8477.p + 1} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{p^2 + 0.7653.p + 1} \right\} .$$

Le second circuit ( $m_2, q_2$ ) est résonnant...

Nous allons donc cascader deux circuits :

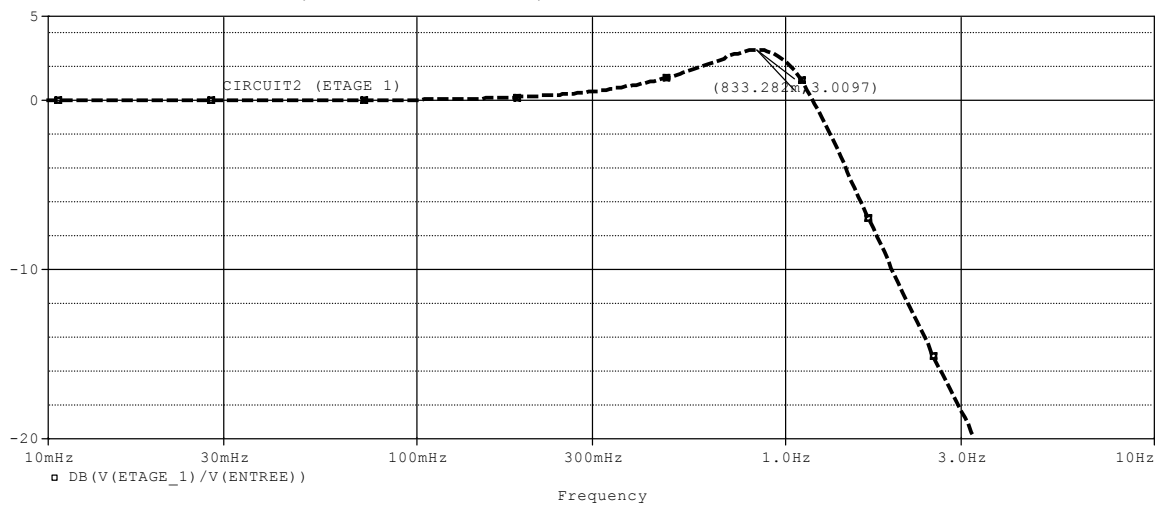


**Le circuit résonnant doit impérativement être placé en tête de l'association !**



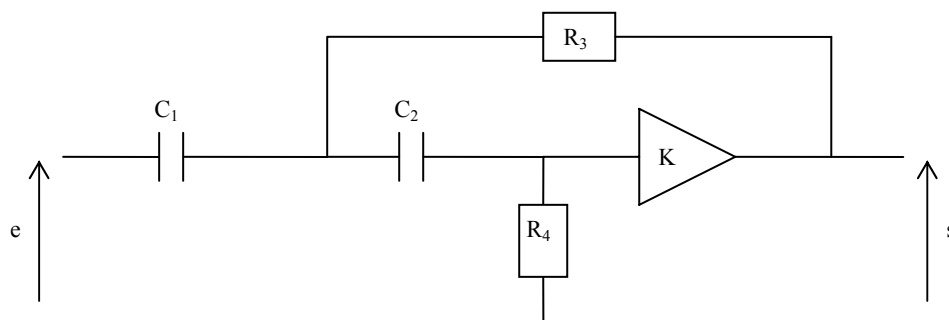
On remarque, sur le diagramme de Bode, qu'il y a une résonance. Cette résonance était prévisible, car elle est stipulée dans les tables :

Circuit 2 :  $V_M = 1,41$        $F_M = 0,840$



La résonance a lieu pour  $f_R = 0,833$  (soit  $f_R = 0,840 \cdot f_0$ ), et de plus l'ondulation est de  $20 \cdot \log(1,41) = 3\text{dB}$ , ce qui est bien la valeur que nous obtenons par simulation.

Normalisation du filtre passe-haut de Salen-Key :



- $Y_1 = C_1 \cdot p$
- $Y_2 = C_2 \cdot p$
- $Z_3 = R_3$
- $Z_4 = R_4$
- $Z_5 = +\infty$

La fonction de transfert est : 
$$H = \frac{K \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot p^2}{R_3 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot p^2 + [R_3(C_1 + C_2) + C_2(1 - K) \cdot R_4]p + 1}$$

Posons :

- $C_1 = C_2 = C_0$
- $R_4 = R_0/m$
- $R_3 = R_0/q$
- $K = 1$

La fonction de transfert est : 
$$H = \frac{R_0^2 \cdot C_0^2 \cdot p^2 / (m \cdot q)}{R_0^2 \cdot C_0^2 \cdot p^2 / (m \cdot q) + 2 \cdot R_0 \cdot C_0 \cdot p / q + 1}$$

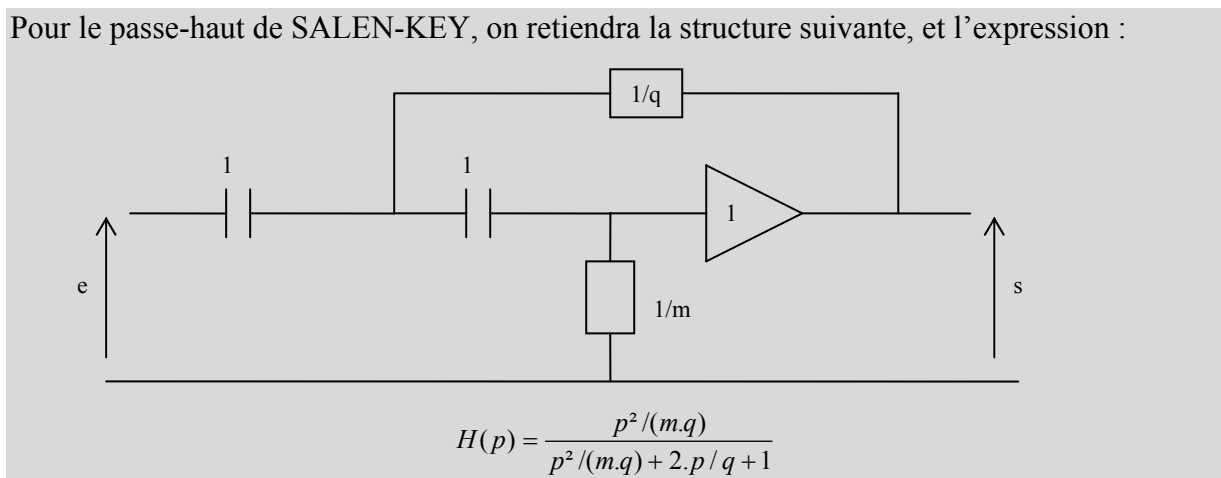
Par identification, on a :

$$\left. \begin{aligned}
 H(p) &= \frac{R_0^2 \cdot C_0^2 \cdot p^2 / (m \cdot q)}{R_0^2 \cdot C_0^2 \cdot p^2 / (m \cdot q) + 2 \cdot R_0 \cdot C_0 \cdot p / q + 1} \\
 H(p) &= \frac{\frac{p^2}{w_n^2}}{\frac{p^2}{w_n^2} + 2\xi \cdot \frac{p}{w_n} + 1}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 w_n &= \frac{\sqrt{m \cdot q}}{R_0 \cdot C_0} & \xi &= \sqrt{\frac{m}{q}}
 \end{aligned}$$

Si on pose :

- $R_0 \rightarrow 1$
- $C_0 \rightarrow 1$
- $R_0/q \rightarrow 1/q$
- $R_0/m \rightarrow 1/m$

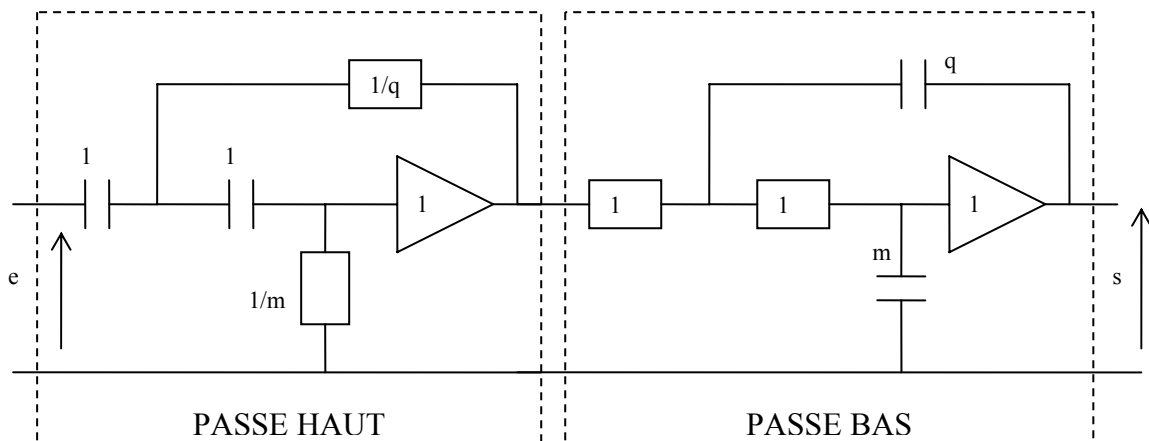
Pour le passe-haut de SALEN-KEY, on retiendra la structure suivante, et l'expression :



Normalisation du passe-bande de Salen-Key :

Il existe une structure 'passe-bande' de Salen-Key, mais elle n'est jamais utilisée, car elle est trop sensible aux écarts de valeurs (une petite fluctuation sur une valeur, se traduit par une grande fluctuation du comportement).

Pour contrecarrer ce problème, on utilise un passe-bas et un passe-haut, que l'on dispose en cascade :



Notons que la structure précédente est composée :

- D'un passe-bas d'ordre 2
- D'un passe-haut d'ordre 2

L'association résultante est donc d'ordre 4.

Pour réaliser un filtre passe-bande, on se référera bien sur aux tables idoines, tout en sachant qu'il faudra définir la bande passante relative (exprimée en pourcentage, est définie par

$$B = \frac{\Delta f_P}{f_P} ).$$



**Filtrage analogique. [CHAPITRE 6]**

1. Synthèse par variables d'état

Les structures de synthèse dite à 'variable d'état' ne fait appel qu'à des opérateurs mathématiques élémentaires pour constituer la fonction de transfert. Ces opérateurs sont des amplificateurs opérationnels bouclés et qui réalisent les fonctions sommation, inversion et intégration.

L'idée maîtresse est de partir de l'expression d'une fonction de transfert, et d'aboutir à une expression qui ne fait appel qu'à des opérateurs mathématiques.

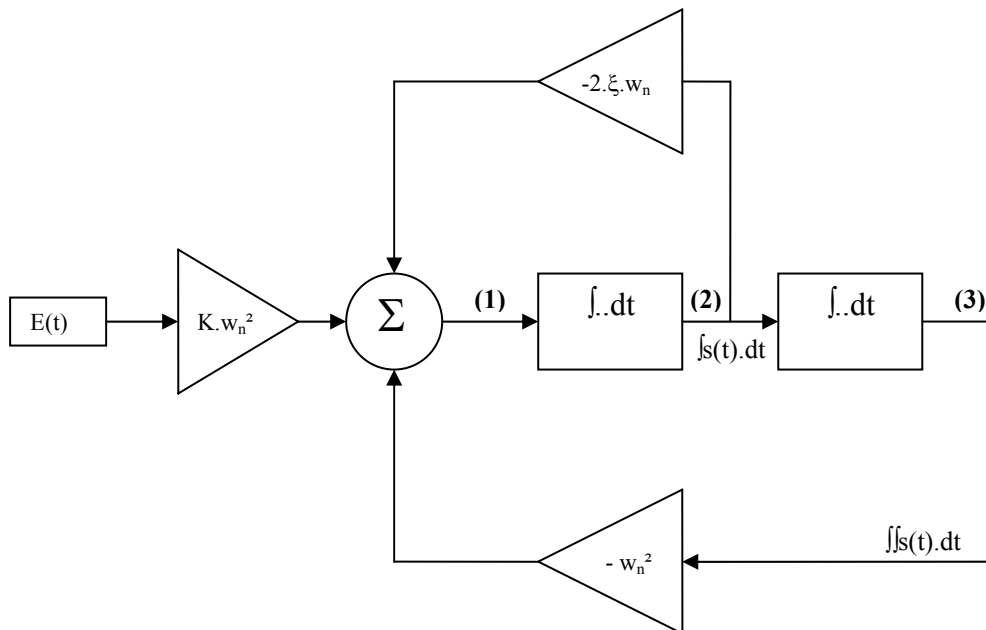
Considérons un passe-haut du second ordre  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K.p^2}{\frac{p^2}{w_n^2} + 2\xi.\frac{p}{w_n} + 1}$ .

Exprimons S(p), soit  $S(p).\left[\frac{p^2}{w_n^2} + 2\xi.\frac{p}{w_n} + 1\right] = E(p).K.p^2$

Divisons par  $p^2/w_n^2$ , ce qui donne :  $S(p).\left[1 + 2\xi.\frac{w_n}{p} + \frac{w_n^2}{p^2}\right] = E(p).K.w_n^2$

Exprimons S(p), soit  $S(p) = K.w_n^2.E(p) - 2\xi.w_n.\frac{S(p)}{p} - w_n^2.\frac{S(p)}{p^2}$

Réalisons une TL<sup>-1</sup> :  $s(t) = K.w_n^2.e(t) - 2\xi.w_n.\int s(t).dt - w_n^2.\iint s(t).dt$



- Sortie 1 : On a la sortie d'un filtre passe-haut du second ordre
- Sortie 2 : On a la sortie d'un passe-bande du second ordre
- Sortie 3 : On a la sortie d'un passe-bas du second ordre.



## Filtrage analogique. [CHAPITRE 7]

### 1. Rappel mathématique sur la sensibilité

Considérons une fonction à plusieurs variables  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ .

La sensibilité  $S_{x_i}^f$  est définie par  $S_{x_i}^f = \frac{\partial f / f}{\partial x_i / x_i} = x_i \cdot \frac{\partial f / \partial x_i}{f} = x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(f)$ .

Cela revient à étudier les variations relatives de la fonction  $f$ , par rapport à la variation relative de paramètre  $x_i$ .

#### Exemple :

Soit la fonction  $f(x, y) = x^2 + 3 \cdot y$

Sensibilité par rapport à  $x$  :  $S_x^f = \frac{\partial f / f}{\partial x / x} = x \cdot \frac{\partial f / \partial x}{f} = x \cdot \frac{2 \cdot x}{x^2 + 3 \cdot y}$

Sensibilité par rapport à  $y$  :  $S_y^f = \frac{\partial f / f}{\partial y / y} = y \cdot \frac{\partial f / \partial y}{f} = y \cdot \frac{3}{x^2 + 3 \cdot y}$

Plaçons-nous en  $x=1$  et  $y=1$ , soit :

$$S_x^f = (1) \cdot \frac{2(1)}{(1)^2 + 3 \cdot (1)} = 0,5$$

$$S_y^f = (1) \cdot \frac{3}{(1)^2 + 3 \cdot (1)} = 0,75$$

Faisons varier  $x$  de 20%, et évaluons les répercussions sur la valeur de la fonction :

$$\text{Variation sur } f = 0,2 \cdot 0,5 = 10\%$$

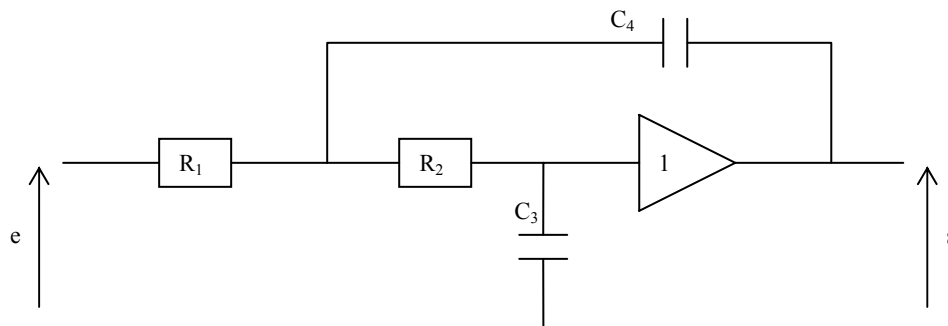
Faisons varier  $y$  de 20%, et évaluons les répercussions sur la valeur de la fonction :

$$\text{Variation sur } f = 0,2 \cdot 0,75 = 15\%$$

La sensibilité sert à quantifier les variations d'une fonction, en fonction des variations de grandeurs. En filtrage, la sensibilité trouve son intérêt, car on veut savoir si une variation sur une valeur de composant influe sur le comportement attendu.

### 2. Application à une structure de Salen-Key

Considérons la structure suivante, de Salen-Key :



La fonction de transfert est  $H = \frac{K}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot p^2 + [(R_1 + R_2) \cdot C_3 + R_1 \cdot C_4 (1 - K)] p + 1}$ .

On a aussi :

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}}$$

$$\xi = \frac{C_1 \cdot [R_1 + R_2]}{2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}}$$

On cherche à étudier la sensibilité par rapport à  $R_1$ , de la pulsation  $w_n$  :

$$S_{R_1}^{w_n} = \frac{\partial w_n / w_n}{\partial R_1 / R_1} = R_1 \cdot \frac{\partial}{\partial R_1} \cdot \ln(w_n)$$

$$S_{R_1}^{w_n} = R_1 \cdot \frac{\partial}{\partial R_1} \cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}}\right)$$

$$S_{R_1}^{w_n} = \frac{-1}{2} \cdot R_1 \cdot \frac{\partial}{\partial R_1} \cdot \ln(R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2)$$

$$S_{R_1}^{w_n} = \frac{-1}{2} \cdot R_1 \cdot \frac{\partial}{\partial R_1} \cdot \ln(R_1)$$

$$S_{R_1}^{w_n} = \frac{-1}{2}$$

En regardant l'expression, on a aussi  $S_{R_1}^{w_n} = S_{R_2}^{w_n} = S_{C_1}^{w_n} = S_{C_2}^{w_n} = \frac{-1}{2}$ .

Ainsi, si la valeur de  $R_1$  varie de 10%, alors  $w_n$  varie de  $-0,50 \cdot 0,10 = -5\%$ .

Ainsi, si la valeur de  $R_2$  varie de 10%, alors  $w_n$  varie de  $-0,50 \cdot 0,10 = -5\%$ .

Ainsi, si la valeur de  $C_1$  varie de 10%, alors  $w_n$  varie de  $-0,50 \cdot 0,10 = -5\%$ .

Ainsi, si la valeur de  $C_2$  varie de 10%, alors  $w_n$  varie de  $-0,50 \cdot 0,10 = -5\%$ .

En d'autres termes, on peut écrire  $\frac{\partial R_1}{R_1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial w_n}{w_n}$

### 3. Conclusion sur la sensibilité

La structure de Salen-Key est appréciable, car les grandeurs importantes (amortissement et fréquence de résonance), ne sont pas très sensibles. Ainsi, une petite fluctuation sur un composant, n'engendrera pas une grande fluctuation sur l'amortissement ou sur la fréquence de résonance.