



Exercices type I, sur la transformée de Fourier

L'énoncé de l'exercice :

Calculer les transformées de Fourier, et représenter les modules et arguments de la fonction suivante.

$$f(x) = e^{-a \cdot x} \cdot u(x)$$

a) L'unique étape !

On applique la définition de la transformée de Fourier, à savoir :

$$\text{RAPPEL : } \hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2i\pi u \cdot x} \cdot dx$$

Dans notre exemple, cela donne :

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2i\pi u \cdot x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} (e^{-a \cdot x}) \cdot e^{-2i\pi u \cdot x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2i\pi u) \cdot x} \cdot dx = \left[\frac{e^{-(a+2i\pi u) \cdot x}}{-(a+2i\pi u)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2i\pi u}$$

L'énoncé de l'exercice :

Calculer les transformées de Fourier, et représenter les modules et arguments de la fonction suivante.

$$f(x) = e^{-a \cdot x} \cdot u(x)$$

$$g(x) = f(x) \cdot \cos(2\pi u_0 \cdot x)$$

a) Réécrivons la fonction

$$\text{Soit } g(x) = f(x) \cdot \cos(2\pi u_0 \cdot x) = f(x) \cdot \frac{e^{i \cdot 2\pi u_0 \cdot x} + e^{-i \cdot 2\pi u_0 \cdot x}}{2} = \frac{f(x) \cdot e^{i \cdot 2\pi u_0 \cdot x}}{2} + \frac{f(x) \cdot e^{-i \cdot 2\pi u_0 \cdot x}}{2}$$

$$\text{RAPPEL : } \hat{f}(u - u_0) = F[e^{i \cdot 2\pi u_0 \cdot x} \cdot f(x)]$$

En appliquant cette présente formule, on aura :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) \cdot e^{i \cdot 2\pi u_0 \cdot x}}{2} + \frac{f(x) \cdot e^{-i \cdot 2\pi u_0 \cdot x}}{2} \\ \hat{g}(u) &= \frac{\hat{f}(u - u_0)}{2} + \frac{\hat{f}(u + u_0)}{2} \\ \hat{g}(u) &= \frac{1}{a + 2i\pi \cdot (u - u_0)} + \frac{1}{a + 2i\pi \cdot (u + u_0)} \end{aligned}$$

L'énoncé de l'exercice :

Calculer les transformées de Fourier, et représenter les modules et arguments de la fonction suivante.

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1/a & |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2i\pi u \cdot x} \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) \cdot e^{-2i\pi u \cdot x} \cdot dx = \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{1}{a} \cdot e^{-2i\pi u \cdot x} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-2i\pi u \cdot x} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{e^{-2i\pi u \cdot x}}{-2i\pi u} \right]_{-a/2}^{+a/2} \\ \hat{f}(u) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{-2i\pi u \cdot a} - e^{i\pi u \cdot a}}{-2i\pi u} = \frac{\sin(\pi u \cdot a)}{\pi u \cdot a} = \text{sinc}(\pi u \cdot a) \end{aligned}$$

Ce résultat est important, et il convient de bien le savoir !

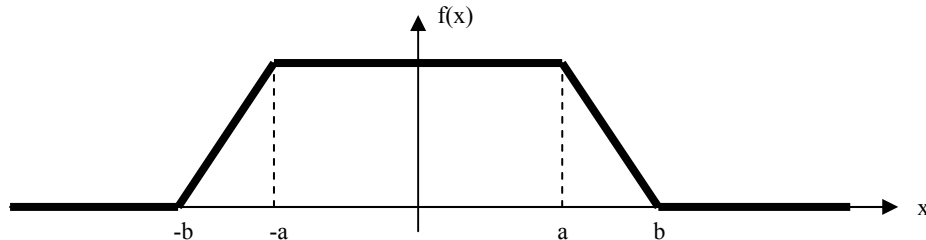
L'énoncé de l'exercice :

Calculer les transformées de Fourier de la fonction suivante.

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si } |x| < a \\ A(x+b)/(b-a) & -b < x < -a \\ -A(x-b)/(b-a) & a < x < b \\ 0 & |x| > b \end{cases} \quad \text{avec } b > a$$

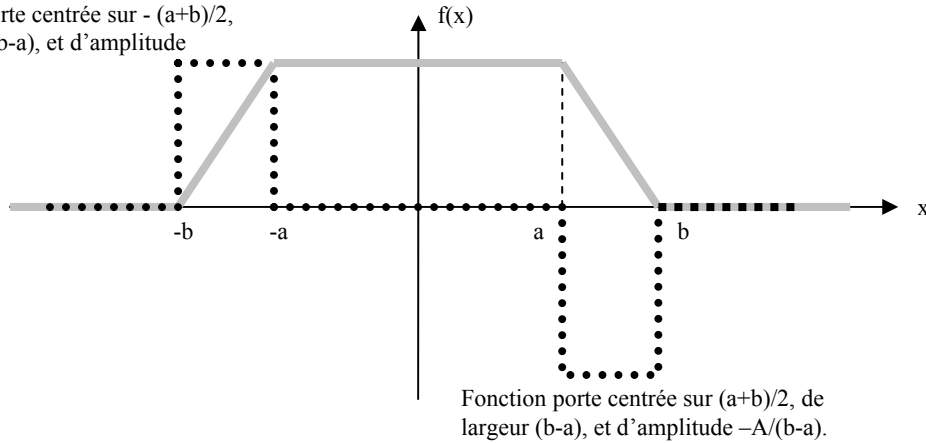
a) La première étape

Commençons par dessiner cette fonction :



Plusieurs méthodes s'offrent à nous : nous allons calculer la transformée de Fourier à partir de la dérivée de la fonction, car elle est facile à déterminer :

Fonction porte centrée sur $-(a+b)/2$, de largeur $(b-a)$, et d'amplitude $A/(b-a)$.



Fonction porte centrée sur $(a+b)/2$, de largeur $(b-a)$, et d'amplitude $-A/(b-a)$.

$$f'(x) = A \left[\Pi_{b-a} \left(x + \frac{a+b}{2} \right) - \Pi_{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right]$$

RAPPEL :

$$f(x-x_0) \xrightarrow{F} e^{-2.i.\pi.u.x} \cdot \hat{f}(u)$$

$$\Pi_T \xrightarrow{F} \frac{\sin(\pi.u.a)}{\pi.u.a}$$

$$\hat{f}'(u) = A \left[e^{2.i.\pi.u.\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{\sin[\pi(b-a).u]}{\pi(b-a).u} - e^{-2.i.\pi.u.\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{\sin[\pi(b-a).u]}{\pi(b-a).u} \right] = 2.A.i.\sin[\pi(a+b).u] \cdot \frac{\sin[\pi(b-a).u]}{\pi(b-a).u}$$

On remonte à $\hat{f}(u)$ en divisant par $2.i.\pi.u$, ce qui nous donne :

$$\hat{f}'(u) = A \cdot \frac{1}{\pi.u} \cdot \sin[\pi(a+b).u] \cdot \frac{\sin[\pi(b-a).u]}{\pi(b-a).u}$$

$$\hat{f}(u) = A.(a+b) \cdot \frac{\sin[\pi(b-a).u]}{\pi(b-a).u} \cdot \frac{\sin[\pi(b-a).u]}{\pi(b-a).u}$$