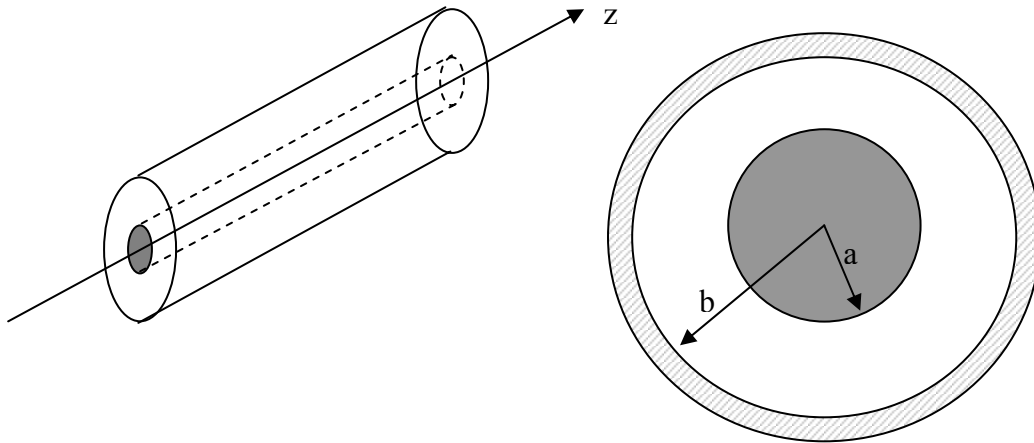


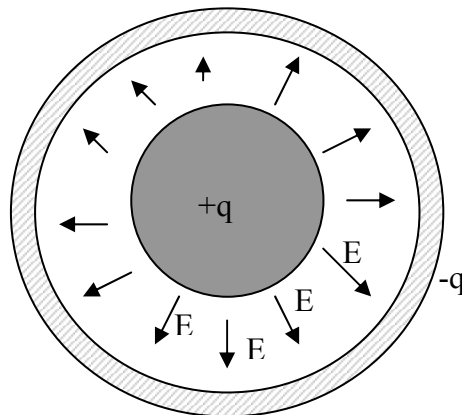
Etude d'un câble coaxial

Le but de cet exercice est de déterminer les paramètres par unité de longueur C et L de ce type de câble. Pour cela on considère que les résultats obtenus en électrostatique peuvent se généraliser au cas d'un mode TEM se propageant dans le câble (même distribution du champ électromagnétique).

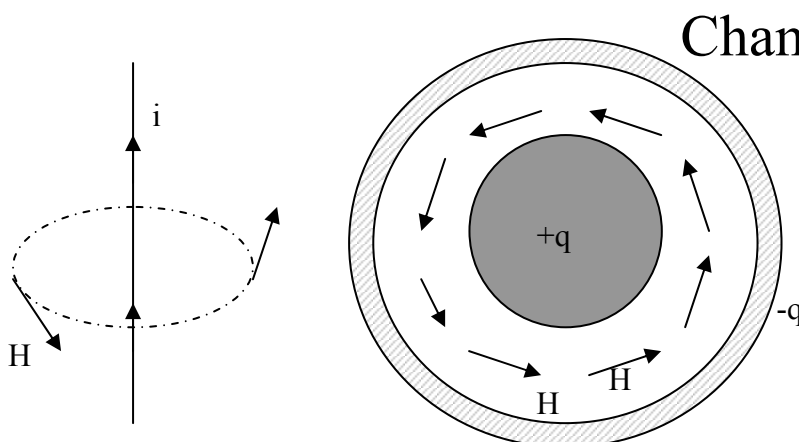


1. En utilisant la symétrie du problème considérer, indiquer sur un schéma les orientations de E , H , J et B dans le plan de section du câble :

Le conducteur central porte une charge '+q', et le conducteur extérieur porte une charge '-q'. Et on sait que le champ électrique est dirigé du (+) vers le (-), ce qui est illustré sur le croquis ci-dessous :

Champ électrique E

Pour le champ magnétique H , il faut appliquer la règle de la main droite (ou du bonhomme d'Ampère, ou du tire bouchon) :

Champ magnétique H

2. Donner l'expression du champ électrique dans l'isolant en fonction de q :

Il faut appliquer le théorème de Gauss $\iint_{SURFACE} E \cdot dS = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R}$, mais il va falloir distinguer plusieurs cas :

$R_{CYLINDRE} < a$: On se retrouve à l'intérieur d'un conducteur, donc $E_1 = 0$

$R_{CYLINDRE} < b$: Les charges intérieures annulent les charges extérieures, donc $E_2 = 0$.

On va s'intéresser au cas où le rayon d'étude est entre a et b, c'est-à-dire entre les deux conducteurs. On va considérer une longueur de 1m, afin de pouvoir par la suite avoir des grandeurs ramenées à un mètre.

$$\iint_{SURFACE} E \cdot dS = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R}$$

$$2 \cdot \pi \cdot R_{RAYON} \cdot 1 \cdot E(R_{RAYON}) = \frac{q \cdot 1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R}$$

$$E(R_{RAYON}) = \frac{q \cdot 1m}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{RAYON} \cdot 1m}$$

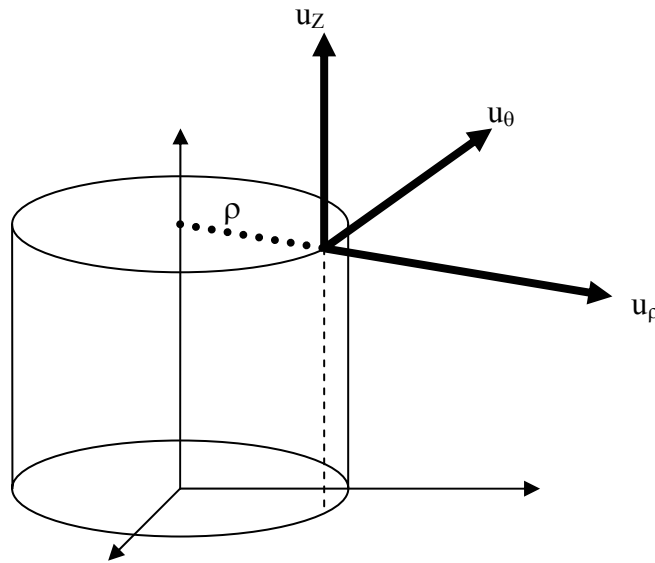
$$E(R_{RAYON}) = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{RAYON}}$$

Si on fait le bilan des unités, on a :

$$E(R_{RAYON}) = \frac{q \cdot 1m}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{RAYON} \cdot 1m} = \frac{[C \cdot m^{-1}]}{[F \cdot m^{-1}] \cdot [m] \cdot [m]} = [C \cdot F^{-1}] \cdot [m]$$

3. Le conducteur intérieur est au potentiel $V_a = 300kV$ et l'enveloppe est au potentiel nul. Quelle relation lie q à V_a ?

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, et comme on utilise les coordonnées cylindriques, on a :



Le champ E est uniquement selon U_ρ , donc cela nous donne :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = \frac{-\partial V}{\partial \rho} \cdot u_\rho$$

Donc en égalisant avec le champ E trouvé précédemment, cela nous donne :

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot R} \\ \vec{E} &= \frac{-\partial V}{\partial \rho} \cdot u_\rho \end{aligned} \right\} \frac{-\partial V}{\partial \rho} = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}$$

Il faut considérer que le rayon d'étude R est identique à ρ , donc on peut procéder à une intégration.

$$\begin{aligned}\frac{-\partial V}{\partial \rho} &= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho} \\ \partial V &= \frac{-q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho} \cdot \partial \rho \\ V &= \int \frac{-q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho} \cdot \partial \rho \\ V &= \frac{-q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \int \frac{\partial \rho}{\rho} \\ V(\rho) &= \frac{-q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \ln(\rho) + CSTE\end{aligned}$$

On sait que $V(a) = 300\text{kV}$ et $V(b) = 0$, donc :

$$\begin{aligned}V(b) &= \frac{-q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \ln(b) + CSTE = 0 \\ CSTE &= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \ln(b)\end{aligned}$$

Donc on peut déterminer $V(a)$:

$$\begin{aligned}V(a) &= \frac{-q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \ln(a) + \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \ln(b) \\ V(a) &= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot [-\ln(a) + \ln(b)] \\ V(a) &= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot [\ln(b) - \ln(a)] \\ V(a) &= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

Avec cette expression, il est possible de déterminer q, tel que :

$$\begin{aligned}V(a) &= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ q &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_R}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot V(a)\end{aligned}$$

En faisant l'application numérique, on aura $q = 3 \cdot 10^{-5} \text{ C.m}^{-1}$

4. A quelle distance de l'axe, le module du champ E est-il maximal ?

L'expression de E est :

$$\vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho}$$

Le maximum sera obtenu lorsque ρ sera minimum, c'est-à-dire pour $\rho = a$.

$$\left| \overrightarrow{E_{MAX}} \right| = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_R}{\ln(b/a)} \cdot V(a) \right)}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_R \cdot 2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{V(a)}{a \cdot \ln(b/a)}$$

En faisant l'application numérique, on aura :

$$\left| \overrightarrow{E_{MAX}} \right| = \frac{V(a)}{a \cdot \ln(b/a)} = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ V.m}^{-1}$$

Remarque : Si on dépasse E_{max} , il y aura un claquage du diélectrique, car on 'tire' trop sur les charges.

Quelle relation existe-t-il entre a et b ?

$$\left| \overrightarrow{E_{MAX}} \right| = \frac{V(a)}{a \cdot \ln(b/a)} = 3,6 \cdot 10^{-8} V \cdot m^{-1}$$

$$\frac{3 \cdot 10^5 V}{a \cdot \ln(b/a)} = 3,6 \cdot 10^{-8} V \cdot m^{-1}$$

$$a \cdot \ln(b/a) = \frac{3 \cdot 10^5}{3,6 \cdot 10^{-8}} = 8,5 \cdot 10^{-4} m$$

Calculer b en fonction de a pour que le diamètre extérieur soit minimal :

$$a \cdot \ln(b/a) = K$$

$$b = a \cdot e^{K/A}$$

Dérivons la fonction pour déterminer le minimum :

$$b = a \cdot e^{K/A}$$

$$\frac{db}{da} = e^{K/A} + a \left(\frac{-K}{a^2} \right) \cdot e^{K/A}$$

$$\frac{db}{da} = e^{K/A} \left(1 - \frac{K}{A} \right)$$

Cette fonction sera minimum pour $a = K$.

Donc si $a = K = 0,85 \text{ mm}$, on aura $b = 2,25 \text{ mm}$.

5. Quelle est la capacité linéique de ce câble ?

AN : $a = 0,65 \text{ mm}$, $b = 2,35 \text{ mm}$, $\varepsilon = 2,26 \cdot \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$.

Par définition, on a $Q = C \cdot U$

$$\text{On a trouvé que } q = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_R}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot [V(a) - V(b)]$$

$$\text{Donc } C = \frac{Q}{V(a) - V(b)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_R}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Si on fait l'application numérique, on a $C = 98 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

6. Quelle est l'expression du champ magnétique dans l'isolant en fonction de I ?

On applique le théorème d'Ampère, soit $\int_{\text{CONTOUR}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$.

$$\text{Ce qui donne } \int_0^{2\pi} H \cdot \rho \cdot d\theta = I, \text{ soit } H \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho = I, \text{ ce qui donne } \vec{H} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \rho} \vec{u}_\theta$$

Remarque : On a appliqué le théorème d'Ampère, en se plaçant en coordonnée cylindrique. Il ne faut pas oublier que la composante du champ magnétique se trouve selon u_θ .

7. Déterminer l'inductance linéique

Par définition, on a $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot \rho} \vec{u}_\theta$$

Ensuite, il faut déterminer le flux de B à travers une surface S qui s'appuie sur le circuit du courant : $\Phi = L \cdot I$.

Au niveau de l'isolant (entre a et b), on a $\Phi = \int_{\rho=a}^{\rho=b} \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot \rho} d\rho$.

Après intégration, on aura :

$$\Phi = \int_{\rho=a}^{\rho=b} \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot \rho} d\rho = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{\rho=a}^{\rho=b} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot [\ln(\rho)]_a^b = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc $\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = L \cdot I$

On peut donc aisément en déduire la valeur de L :

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = L \cdot I$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

En faisant l'application numérique, on aura $L = 0,25 \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$

8. Calculer les énergies (électrique et magnétique) emmagasinées dans une portion de câble par unité de longueur.

$$W_{\text{électrique}} = \frac{1}{2} \cdot \int_V \epsilon \cdot |E|^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot C V^2$$

$$W_{\text{magnétique}} = \frac{1}{2} \cdot \int_V \mu_0 \cdot |H|^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot L I^2$$

9. Si l'on néglige les pertes par conduction et par effet Joule de ce câble, son impédance caractéristique est donné par :

On nous donne que : $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$

NB : Cette formule peut être retrouvée, car elle est donnée dans le cours...

On va donc pouvoir déterminer l'impédance du câble, en appliquant la formule :

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

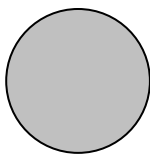
Si on fait l'application numérique, on a $Z = 50 \Omega$.

10. En tenant compte de l'effet de peau, calculer la résistance linéique R du câble :

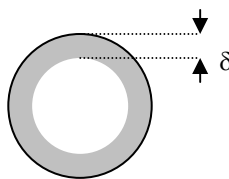
NB : L'effet de peau consiste en une circulation du champ électromagnétique, qu'au voisinage de la surface du conducteur, sur une épaisseur $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}$. En hautes fréquences, le courant tend à être confiné en surface du conducteur.

Par définition, on a $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{S} = \rho \cdot \frac{\ell}{S}$, avec ρ la densité volumique.

Voyons cela de manière intuitive, avant de nous plonger dans les calculs :



En BF, le courant est réparti.



En HF, le courant est en surface.

On nous donne des informations sur la conductivité du cuivre :

$$\sigma = 5,8.10^7 \Omega^{-1}.m$$

On nous informe aussi du comportement fréquentiel :

$$f = 100\text{Mhz} \Rightarrow \delta = 6,60\mu m$$

$$f = 3\text{Ghz} \Rightarrow \delta = 1,20\mu m$$

On voit que plus la fréquence augmente, et plus l'épaisseur de la zone sur laquelle se trouvent les charges, va s'amenuiser.

Etant donné qu'il y a deux conducteurs (le premier est de rayon a, et le second est de rayon b), il va donc falloir en tenir compte, et cela va se traduire par le fait que la résistance R sera égale à la somme des résistances R_A et R_B de chacun de ces deux conducteurs.

Pour le conducteur intérieur, on aura :

Par définition, on a : $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{S}$

Appliqué à notre cas, on a $R_A = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \delta}$

Pour le conducteur extérieur, on aura similairement :

Par définition, on a : $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{S}$

Appliqué à notre cas, on a $R_B = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \delta}$

La résistance totale sera égale à la somme des deux résistances :

$$R = R_A + R_B = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \delta} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \delta}$$

$$R = \frac{1}{\sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

En faisant l'application numérique, on aura :

Pour $f = 100\text{Mhz}$, $R = 0,8\Omega.m^{-1}$

Pour $f = 3\text{Ghz}$, $R = 4,4\Omega.m^{-1}$

11. Dédurre la conductance G du câble coaxial :

Essayons de raisonner intuitivement, dans un premier temps. Lorsque le courant I passe d'une armature à l'autre, il s'agit d'un courant de fuite, ce qui justifie la présence d'une résistance de fuite.

On a une expression (qui nous est donnée) : $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$.

Il y a un terme imaginaire (la permittivité imaginaire), qui tient compte des pertes dans le coaxial.

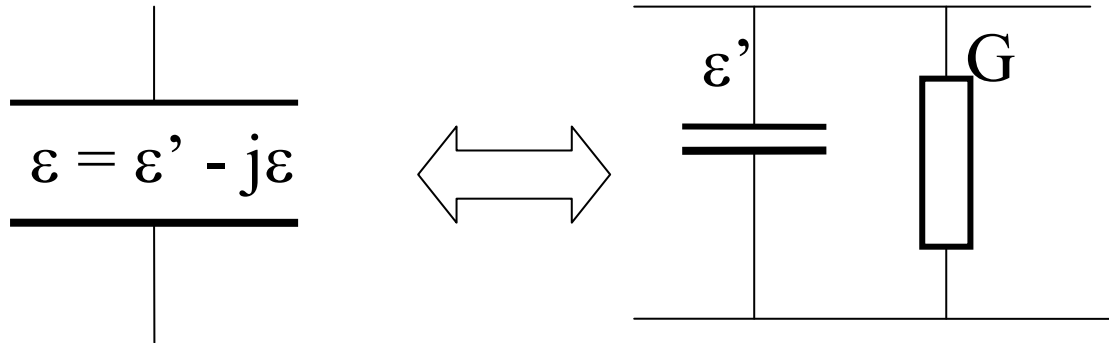
Nous avons trouvé que la capacité linéique de ce câble avait pour expression : $C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$.

On sait aussi que l'admittance vaudra $y = j \cdot C \cdot w$

Donc on aura $y = j \cdot w \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right\} = \frac{2 \cdot \pi \cdot w}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot j \cdot (\varepsilon' - j\varepsilon'')$

Soit $y = j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot w}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \varepsilon' + \frac{2 \cdot \pi \cdot w}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \varepsilon'' = jw + G$

Si on fait un petit (voir même un grand !) croquis, on aura :



On a $\epsilon' = 2,28.\epsilon_0$

A 100Mhz, on a $G = 3,1.105 \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ soit $R = 77\text{k}\Omega.\text{m}^{-1}$

A 3Ghz, on a $G = 32,3 \text{ k}\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ soit $R = 32 \text{ k}\Omega.\text{m}^{-1}$

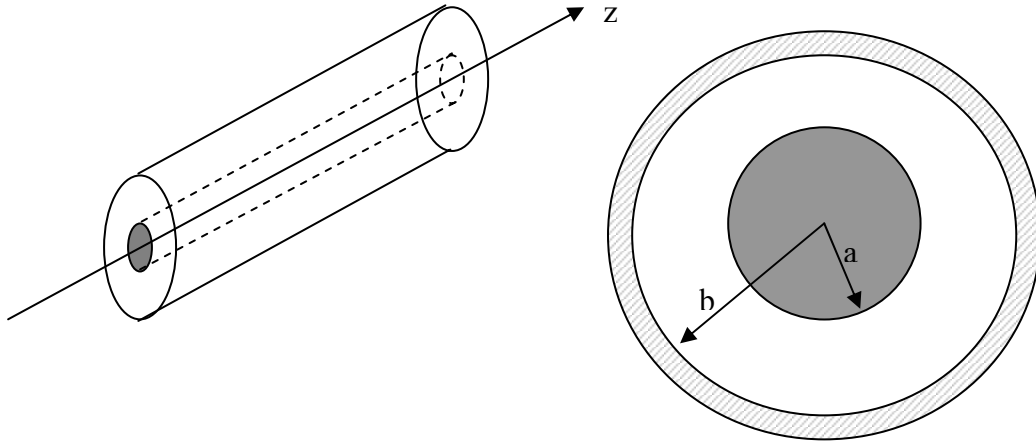
On observe que plus la fréquence est élevée, et plus la résistance R diminue, donc par conséquent, meilleur sera la conduction !

Remarque complémentaire :

Si vous êtes férus des câbles coaxiaux, je vous recommande le livre « *Eléments de propagation électromagnétique* » de Philippe ROSNET. A la page 105 il y a une étude similaire à celle que nous venons de faire. En plus, ce livre est très bien écrit !

A RETENIR DU TD2

La vue en 2D et 3D d'un câble coaxial :



Les diverses expressions :

Capacité linéique : $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Inductance linéique : $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

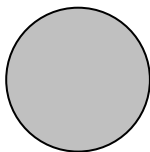
Résistance linéique : $R = \frac{1}{\sigma_{\text{CUIVRE}} \cdot 2\pi \cdot \delta} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Impédance caractéristique : $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

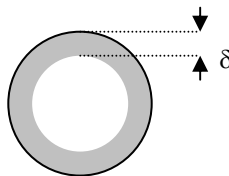
L'effet de peau :

L'effet de peau consiste en une circulation du champ électromagnétique, qu'au voisinage de la surface du conducteur, sur une

épaisseur $\delta = \sqrt{\frac{2}{w \cdot \mu \cdot \sigma}}$. En hautes fréquences, le courant tend à être confiné en surface du conducteur.



En BF, le courant est réparti.



En HF, le courant est en surface.